УДК 531.38

©2014. **Г.В. Горр, Е.К. Щетинина**

ПОЛУРЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА РОТОРА

Установлены условия существования полурегулярных прецессий первого типа в задаче о движении тяжелого гиростата, несущего два вращающихся ротора. Получены новые решения уравнений движения рассматриваемой механической системы, которые выражаются элементарными и эллиптическими функциями времени.

Ключевые слова: *полурегулярная прецессия, гиростат, ротор.*

Введение. Для управления движением современных технических конструкций используются вращающиеся роторы. При моделировании движений таких механических систем используются модели гиростатов [1–3], гиродинов [4]. Уравнения движения гиростата и системы связанных твердых тел рассмотрены в работах [5–8]. Ранее в задачах о движении гиростата рассматривались такие случаи: гиростатический момент постоянен; гиростатический момент формируется одним или двумя вращающимися с непостоянной скоростью роторами. Обзор результатов, полученных в исследовании движений гиростатов с постоянным гиростатическим моментом, приведен в [3]. В статьях [9–16] изучаются условия существования различных типов движения гиростата с одним вращающимся ротором. В работах [17,18] исследованы маятниковые и прецессионные движения гиростата, который несет два вращающихся ротора.

Данная статья посвящена изучению условий существования полурегулярных прецессионных движений гиростата, несущего два ротора, под действием силы тяжести.

1. Постановка задачи. Кинематические условия. Запишем уравнения движения гиростата – механической системы, состоящей из тела-носителя и двух вращающихся роторов, – под действием силы тяжести [7]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\omega}-\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha}-\dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta}+A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}+\mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя S_0; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, который определяется равенством $\mathbf{s} = mg\mathbf{r}_c$ ($\mathbf{r}_c = \mathbf{OC}$); O – неподвижная точка тела-носителя; C – центр тяжести гиростата; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – единичные ортогональные векторы; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $\lambda_1(t)$ и $\lambda_1(t)$ – компоненты гиростатического момента, характеризующие движение несущих роторов.

Уравнения (1) имеют интегралы

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\nu} = k, \quad (2)$$

где k – произвольная постоянная.

Зададим программное движение тела-носителя в виде полурегулярной прецессии относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$. Если в подвижной системе координат через $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$ обозначить вектор, неизменно связанный с телом-носителем, то полурегулярная прецессия характеризуется инвариантным соотношением

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0). \tag{3}$$

В (3) θ_0 – постоянная. В [3] показано, что при выполнении (3) вектор угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}. \tag{4}$$

Для полурегулярной прецессии первого типа $\dot{\psi} = m = \mathrm{const}$, т. е. в силу (4)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu}. \tag{5}$$

Подстановка (5) в кинематическое уравнение Пуассона из (1), геометрический интеграл (2) и учет инвариантного соотношения (3) дает возможность в подвижной системе координат выразить компонентны векторов $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}$ следующим образом:

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \qquad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \qquad \nu_3 = a_0, \tag{6}$$

$$\omega_1 = a_0' m \sin\varphi, \qquad \omega_2 = a_0' m \cos\varphi, \qquad \omega_3 = \dot{\varphi} + m a_0. \tag{7}$$

Следовательно, достаточно рассмотреть динамическое уравнение из (1) вместе с равенствами (6), (7), определяющими общий вид решения для прецессии (3).

2. Динамическое уравнение. Подставим выражение (5) в динамическое уравнение из (1):

$$\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = \lambda_1(t)\big[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + m(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})\big] +$$

$$+\lambda_2(t)\big[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a} + m(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu})\big] - \ddot{\varphi}A\boldsymbol{a} + \dot{\varphi}^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\varphi}(\boldsymbol{a} \times B\boldsymbol{\nu}) - m^2\boldsymbol{\nu} \times A\boldsymbol{\nu}, \tag{8}$$

где

$$B = m(\mathrm{Sp}(A)\delta - 2A). \tag{9}$$

Здесь δ – единичная матрица третьего порядка, $\mathrm{Sp}(A)$ – след матрицы A.

Интеграл момента количества движения из (2) преобразуется так

$$\big(\dot{\varphi}A\boldsymbol{a} + mA\boldsymbol{\nu} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}\big) \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \tag{10}$$

Для исследования уравнения (8) удобно использовать ортонормированный базис $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$. Проектируя левую и правую части уравнения (8) на этот базис, получим

$$\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t)\big[m(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}\big] - \mu_0\ddot{\varphi} + \mu_1\dot{\varphi}^2 +$$

$$+\dot\varphi(\mu_2\sin\varphi+\mu_3\cos\varphi+\mu_4)+\mu_5\sin2\varphi+\mu_6\cos2\varphi+\mu_7\sin\varphi+\mu_8\cos\varphi+\mu_9, \quad (11)$$

$$\dot\lambda_2(t)=-\lambda_1(t)\big[m(a_0'\gamma_1\sin\varphi+a_0'\gamma_2\cos\varphi+a_0\gamma_3)+\gamma_3\dot\varphi\big]-\varepsilon_0\ddot\varphi+\varepsilon_1\dot\varphi^2+$$

$$+\dot\varphi(\varepsilon_2\sin\varphi+\varepsilon_3\cos\varphi+\varepsilon_4)+\varepsilon_5\sin2\varphi+\varepsilon_6\cos2\varphi+\varepsilon_7\sin\varphi+\varepsilon_8\cos\varphi+\varepsilon_9, \quad (12)$$

$$\lambda_1(t)\big[m(a_0'\beta_1\sin\varphi+a_0'\beta_2\cos\varphi+a_0\beta_3)+\dot\varphi\beta_3\big]-$$

$$-\lambda_2(t)\big[m(a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0'\alpha_2\cos\varphi++a_0\alpha_3)+\dot\varphi\alpha_3\big]-\sigma_0\ddot\varphi+\sigma_1\dot\varphi^2+ \quad (13)$$

$$+\dot\varphi(\sigma_2\sin\varphi+\sigma_3\cos\varphi+\sigma_4)+\sigma_5\sin2\varphi+\sigma_6\cos2\varphi+\sigma_7\sin\varphi+\sigma_8\cos\varphi+\sigma_9=0.$$

В уравнениях (11)–(13) введены обозначения

$$\gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2, \qquad \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3, \qquad \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,$$

$$\mu_0=\alpha_1A_{13}+\alpha_2A_{23}+\alpha_3A_{33}, \qquad \mu_1=\alpha_1A_{23}-\alpha_2A_{13},$$

$$\mu_2=a_0'(\alpha_2B_{11}-\alpha_1B_{12}), \qquad \mu_3=a_0'(\alpha_2B_{12}-\alpha_1B_{22}),$$

$$\mu_4=a_0(\alpha_2B_{13}-\alpha_1B_{23}), \qquad \mu_5=\frac{1}{2}a'^2_0m^2\big[\alpha_2A_{23}-\alpha_1A_{13}+\alpha_3(A_{11}-A_{22})\big],$$

$$\mu_6=\frac{1}{2}a'^2_0m^2\big[2\alpha_3A_{12}-\alpha_2A_{13}-\alpha_1A_{23}\big], \quad (14)$$

$$\mu_7=a_0'\big[a_0\alpha_1A_{12}+\alpha_2\big(s_3-a_0m^2(A_{11}-A_{33})\big)-\alpha_3(s_2+a_0m^2A_{23})\big],$$

$$\mu_8=a_0'\big[-\alpha_1\big(s_3-a_0m^2(A_{22}-A_{33})\big)-a_0\alpha_2m^2A_{12}+\alpha_3(s_1+a_0m^2A_{13})\big],$$

$$\mu_9=\frac{\alpha_1}{2}\big[2a_0s_2-m^2(a'^2_0-2a_0^2)A_{23}\big]-\frac{\alpha_2}{2}\big[2a_0s_1-m^2(a'^2_0-2a_0^2)A_{13})\big],$$

$$\varepsilon_0=\beta_1A_{13}+\beta_2A_{23}+\beta_3A_{33}, \qquad \varepsilon_1=\beta_1A_{23}-\beta_2A_{13},$$

$$\varepsilon_2=a'_0(\beta_2B_{11}-\beta_1B_{12}), \qquad \varepsilon_3=a'_0(\beta_2B_{12}-\beta_1B_{22},$$

$$\varepsilon_4=a_0(\beta_2B_{13}-\beta_1B_{23}), \qquad \varepsilon_5=\frac{1}{2}a'^2_0m^2\big[\beta_2A_{23}-\beta_1A_{13}+\beta_3(A_{11}-A_{22})\big],$$

$$\varepsilon_6=\frac{1}{2}a'^2_0m^2\big(2\beta_3A_{12}-\beta_2A_{13}-\beta_1A_{23}\big), \quad (15)$$

$$\varepsilon_7=a_0'\big[a_0\beta_1A_{12}+\beta_2\big(s_3-a_0m^2(A_{11}-A_{33})\big)-\beta_3(s_2+a_0m^2A_{23})\big],$$

$$\varepsilon_8=a_0'\big[-\beta_1\big(s_3-a_0m^2(A_{22}-A_{33})\big)-a_0\beta_2m^2A_{12}+\beta_3(s_1+a_0m^2A_{13})\big],$$

$$\varepsilon_9=\frac{\beta_1}{2}\big[2a_0s_2-m^2(a'^2_0-2a_0^2)A_{23}\big]-\frac{\beta_2}{2}\big[2a_0s_1-(a'^2_0-2a_0^2)A_{13}\big],$$

$$\sigma_0=\gamma_1A_{13}+\gamma_2A_{23}+\gamma_3A_{33}, \qquad \sigma_1=\gamma_1A_{23}-\gamma_2A_{13},$$

$$\sigma_2=a'_0(\gamma_2B_{11}-\gamma_1B_{12}), \qquad \sigma_3=a'_0(\gamma_2B_{12}-\gamma_1B_{22}),$$

$$\sigma_4 = a_0(\gamma_2 B_{13} - \gamma_1 B_{23}), \qquad \sigma_5 = \frac{1}{2}a'^2_0 m^2\bigl[\gamma_2 A_{23} - \gamma_1 A_{13} + \gamma_3(A_{11} - A_{22})\bigr],$$
$$\sigma_6 = \frac{1}{2}a'^2_0 m^2\bigl(2\gamma_3 A_{12} - \gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}\bigr), \tag{16}$$
$$\sigma_7 = a'_0\bigl[a_0\gamma_1 A_{12} + \gamma_2\bigl(s_3 - a_0 m^2(A_{11} - A_{33})\bigr) - \gamma_3(s_2 + a_0 m^2 A_{23})\bigr],$$
$$\sigma_8 = a'_0\bigl[-\gamma_1\bigl(s_3 - a_0 m^2(A_{22} - A_{33})\bigr) - a_0\gamma_2 A_{12} + \gamma_3(s_1 + a_0 m^2 A_{13})\bigr],$$
$$\sigma_9 = \frac{\gamma_1}{2}\bigl[2a_0 s_2 - m^2(a'^2_0 - 2a_0^2)A_{23}\bigr] - \frac{\gamma_2}{2}\bigl[2a_0 s_1 - (a'^2_0 - 2a_0^2)A_{13}\bigr],$$

где в силу (9)

$$B_{11} = m(A_{33} - A_{11} + A_{22}), \quad B_{22} = m(A_{11} - A_{22} + A_{33}),$$
$$B_{33} = m(A_{22} - A_{33} + A_{11}), \tag{17}$$
$$B_{12} = -2mA_{12}, \qquad B_{13} = -2mA_{13}, \qquad B_{23} = -2mA_{23}.$$

Таким образом, динамическое уравнение из (1) приводит к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений (11)–(13), которая линейна относительно функций $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и нелинейна относительно функции $\varphi(t)$. Условия существования решений этой системы и служат условиями, при выполнении которых гиростат совершает полурегулярную прецессию (6), (7).

3. Случай сферического гиростата с неподвижным центром масс. Рассмотрим вариант, когда центр масс гиростата неподвижен, а эллипсоид инерции является сферой, т. е. выполнены условия

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0, \qquad A_{11} = A_{22} = A_{33} = A. \tag{18}$$

В силу (18) все компоненты A_{ij} $(i \neq j)$ обращаются в нуль, а из (17) следует $B_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $B_{11} = B_{22} = B_{33} = mA$. Учтем эти свойства в равенствах (14)–(16):

$$\begin{gathered}
\mu_0 = \alpha_3 A, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = a'_0\alpha_2 mA, \quad \mu_3 = -a'_0\alpha_1 mA, \\
\mu_4 = 0, \quad \mu_5 = 0, \quad \mu_6 = 0, \quad \mu_7 = 0, \quad \mu_8 = 0, \quad \mu_9 = 0, \\
\varepsilon_0 = \beta_3 A, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = a'_0\beta_2 mA, \quad \varepsilon_3 = -a'_0\beta_1 mA, \\
\varepsilon_4 = 0, \quad \varepsilon_5 = 0, \quad \varepsilon_6 = 0, \quad \varepsilon_7 = 0, \quad \varepsilon_8 = 0, \quad \varepsilon_9 = 0, \\
\sigma_0 = \gamma_3 A, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = a'_0\gamma_2 mA, \quad \sigma_3 = -a'_0\gamma_1 mA, \\
\sigma_4 = 0, \quad \sigma_5 = 0, \quad \sigma_6 = 0, \quad \sigma_7 = 0, \quad \sigma_8 = 0, \quad \sigma_9 = 0.
\end{gathered} \tag{19}$$

На основании (19) уравнения (11)–(13) упрощаются:

$$\begin{aligned}
&\bigl[\lambda_1(t) + \alpha_3 A\dot\varphi(t) + a'_0 Am(\alpha_1\sin\varphi(t) + \alpha_2\cos\varphi(t))\bigr]^\bullet = \\
&= \lambda_2(t)\bigl[m(a'_0\gamma_1\sin\varphi(t) + a'_0\gamma_2\cos\varphi(t) + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot\varphi(t)\bigr], \\
&\bigl[\lambda_2(t) + \beta_3 A\dot\varphi(t) + a'_0 Am(\beta_1\sin\varphi(t) + \beta_2\cos\varphi(t))\bigr]^\bullet = \\
&= -\lambda_1(t)\bigl[m(a'_0\gamma_1\sin\varphi(t) + a'_0\gamma_2\cos\varphi(t) + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot\varphi(t)\bigr],
\end{aligned} \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(t)\big[m(a_0'\beta_1\sin\varphi(t)+a_0'\beta_2\cos\varphi(t)+a_0\beta_3)+\dot\varphi(t)\beta_3\big]-\\
&-\lambda_2(t)\big[m(a_0'\alpha_1\sin\varphi(t)+a_0'\alpha_2\cos\varphi(t)+a_0\alpha_3)+\dot\varphi(t)\alpha_3\big]-\\
&-\gamma_3A\ddot\varphi(t)+a_0'mA\dot\varphi(t)\big(\gamma_2\sin\varphi(t)-\gamma_1\cos\varphi(t)\big)=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Уравнения (20) допускают частное решение

$$
\dot\varphi=-\frac{m}{\gamma_3}(a_0'\gamma_1\sin\varphi+a_0'\gamma_2\cos\varphi+a_0\gamma_3),
\tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(t)+\alpha_3A\dot\varphi(t)+a_0'mA\big(\alpha_1\sin\varphi(t)+\alpha_2\cos\varphi(t)\big)=\varkappa_1,\\
&\lambda_2(t)+\beta_3A\dot\varphi(t)+a_0'mA\big(\beta_1\sin\varphi(t)+\beta_2\cos\varphi(t)\big)=\varkappa_2,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – произвольные постоянные.

Подставляя $\dot\varphi,\lambda_1,\lambda_2$ из (22), (23) в уравнение (21) и требуя, чтобы полученное равенство было тождеством по t, найдем функции

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(t)&=\frac{a_0'mA}{\gamma_3}(\beta_1\cos\varphi(t)-\beta_2\sin\varphi(t)),\\
\lambda_2(t)&=\frac{a_0'mA}{\gamma_3}(\alpha_1\cos\varphi(t)-\alpha_2\sin\varphi(t)).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Таким образом, для сферического гиростата решение уравнений (11)–(13) определено соотношениями (22), (24). Из уравнения (22) вытекает, что функция $\varphi(t)$ является элементарной функцией времени и существует при $\gamma_3\neq 0$. Основными свойствами решения (22), (24) являются: параметры θ_0, m и A – произвольны, векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, задающие гиростатический момент, и вектор $\boldsymbol{a}$ не могут лежать в одной плоскости.

4. Случай динамической симметрии тела-носителя. Покажем, что решение (22), (24) обобщается на случай, когда выполнены условия

$$
A_{22}=A_{11},\qquad s_1=s_2=0,\qquad s_3=a_0m^2(A_{11}-A_{33}).
\tag{25}
$$

На основании условий (25) из равенств (14)–(17) имеем

$$
\begin{aligned}
&\mu_0=\alpha_3A_{33},\quad \mu_1=0,\quad \mu_2=a_0'\alpha_2mA_{33},\quad \mu_3=-a_0'\alpha_1mA_{33},\\
&\mu_4=0,\quad \mu_5=0,\quad \mu_6=0,\quad \mu_7=0,\quad \mu_8=0,\quad \mu_9=0,\\
&\varepsilon_0=\beta_3A_{33},\quad \varepsilon_1=0,\quad \varepsilon_2=a_0'\beta_2mA_{33},\quad \varepsilon_3=-a_0'\beta_1mA_{33},\\
&\varepsilon_4=0,\quad \varepsilon_5=0,\quad \varepsilon_6=0,\quad \varepsilon_7=0,\quad \varepsilon_8=0,\quad \varepsilon_9=0,\\
&\sigma_0=\gamma_3A_{33},\quad \sigma_1=0,\quad \sigma_2=a_0'\gamma_2mA_{33},\quad \sigma_3=-a_0'\gamma_1mA_{33},\\
&\sigma_4=0,\quad \sigma_5=0,\quad \sigma_6=0,\quad \sigma_7=0,\quad \sigma_8=0,\quad \sigma_9=0.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Уравнения (11)–(13) при выполнении условий (25), (26) принимают вид уравнений (20), (21), в которых необходимо вместо A ввести параметр A_{33}. Это означает, что уравнения (11)–(13) допускают решение

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t) &= -\frac{m}{\gamma_3}(a_0'\gamma_1 \sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2 \cos\varphi(t) + a_0\gamma_3),\\
\lambda_1(t) &= \frac{a_0' m A_{33}}{\gamma_3}(\beta_1 \cos\varphi(t) - \beta_2 \sin\varphi(t)),\\
\lambda_2(t) &= \frac{a_0' m A_{33}}{\gamma_3}(\alpha_1 \cos\varphi(t) - \alpha_2 \sin\varphi(t)),
\end{aligned} \tag{27}$$

где $\gamma_3 \neq 0$. Выберем подвижную систему координат так, чтобы выполнялось равенство $\gamma_1 = 0$. Тогда из первого уравнения системы (27) найдем

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= 2\,\mathrm{arctg}\Big[\frac{\sqrt{\mu_0^2-\mu_1^2}}{\mu_0-\mu_1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{\mu_0^2-\mu_1^2}}{2}(t-t_0)\Big] \quad (\mu_0^2 > \mu_1^2),\\
\varphi(t) &= 2\,\mathrm{arctg}\Big[\frac{\sqrt{\mu_1^2-\mu_0^2}}{\mu_0-\mu_1}\mathrm{cth}\frac{\sqrt{\mu_1^2-\mu_0^2}}{2}(t-t_0)\Big] \quad (\mu_1^2 > \mu_0^2).
\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь

$$\mu_0 = -a_0 m, \qquad \mu_1 = -a_0' m\gamma_2/\gamma_3.$$

В решении (27), (28) параметры a_0 и m^2 связаны последним равенством из (25), выбор плоскости векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ должен удовлетворять условию $\gamma_3 \neq 0$, т. е. эта плоскость не должна содержать ось собственного вращения тела-носителя.

5. Случай $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{a}$. В этом случае выполняются условия $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{a} = 0$. То есть гиростатический момент ортогонален оси собственного вращения, что нетрудно осуществить на практике. Положим в формулах (14)–(16) $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\beta} = (0,1,0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mu_0 = 0,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0,\ \mu_3 = a_0' m(A_{11} - A_{22} + A_{33}),\ \mu_4 = 0,\ \mu_5 = 0,\\
&\mu_6 = 0,\ \mu_7 = 0,\ \ \mu_8 = -a_0'\big[s_3 - a_0 m^2(A_{22} - A_{33})\big],\ \ \mu_9 = a_0 s_2,\\
&\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = a_0' m(A_{22} - A_{11} + A_{33}),\\
&\varepsilon_3 = 0, \ \ \varepsilon_4 = 0, \ \ \varepsilon_5 = 0, \ \ \varepsilon_6 = 0,\\
&\varepsilon_7 = a_0'\big[s_3 - a_0 m^2(A_{11} - A_{33})\big], \quad \varepsilon_8 = 0, \quad \varepsilon_9 = -a_0 s_1,\\
&\sigma_0 = A_{33}, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = 0,\\
&\sigma_5 = \frac{1}{2}a_0'^2 m^2(A_{11} - A_{22}), \ \ \sigma_6 = 0, \quad \sigma_7 = -a_0' s_2, \quad \sigma_8 = a_0' s_1, \quad \sigma_9 = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

На основании (29) уравнения (11)–(13) запишутся так:

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1 = \lambda_2(a_0 m + \dot{\varphi}) - \dot{\varphi}a_0' m(A_{11} - A_{22} + A_{33})\cos\varphi -\\
&-a_0'\big[s_3 - a_0 m^2(A_{22} - A_{33})\big]\cos\varphi + a_0 s_2,
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1(a_0 m + \dot{\varphi}) - \dot{\varphi} a_0' m (A_{11} - A_{22} - A_{33}) \sin\varphi + \\ + a_0' \big[s_3 - a_0 m^2 (A_{11} - A_{33}) \big] \sin\varphi - a_0 s_1, \tag{31}$$

$$a_0' m (\lambda_1(t)\cos\varphi - \lambda_2(t)\sin\varphi) - A_{33}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m^2 a'^2_0 (A_{11} - A_{22}) \sin 2\varphi - \\ - a_0' s_2 \sin\varphi + a_0' s_1 \cos\varphi = 0. \tag{32}$$

Введем вместо λ_1 и λ_2 новые переменные u, v:

$$u(t) = \lambda_1(t)\cos\varphi - \lambda_2(t)\sin\varphi, \\ v(t) = \lambda_1(t)\sin\varphi + \lambda_2(t)\cos\varphi. \tag{33}$$

Исходные переменные находятся по формулам

$$\lambda_1(t) = u(t)\cos\varphi + v(t)\sin\varphi, \\ \lambda_2(t) = -u(t)\sin\varphi + v(t)\cos\varphi. \tag{34}$$

С помощью (30), (31), (33) определим дифференциальные уравнения для функций $u(t), v(t)$:

$$\dot{u} = a_0 m v - a_0' m \dot{\varphi} \big[A_{33} + (A_{11} - A_{22}) \cos 2\varphi \big] - \\ - a_0' \big[s_3 - a_0 m^2 \big(\frac{A_{11} + A_{22}}{2} - A_{33} \big) \big] - \\ - \frac{1}{2} a_0 a_0' (A_{11} - A_{22}) m^2 \cos 2\varphi + a_0 (s_2 \cos\varphi + s_1 \sin\varphi), \\ \dot{v} = -a_0 m u - a_0' m \dot{\varphi} (A_{11} - A_{22}) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} a_0' a_0 (A_{11} - A_{22}) m^2 \sin 2\varphi + \\ + a_0 (s_2 \sin\varphi - s_1 \cos\varphi). \tag{35}$$

Из уравнения (32) найдем

$$u = \frac{1}{a_0' m} \big[A_{33}\ddot{\varphi} - \frac{1}{2} a'^2_0 m^2 (A_{11} - A_{22}) \sin 2\varphi + a_0' (s_2 \sin\varphi - s_1 \cos\varphi) \big]. \tag{36}$$

Подставим выражение (36) во второе уравнение из (35) и проинтегрируем полученное уравнение:

$$v = -\frac{a_0}{a_0'} A_{33}\dot{\varphi} + \frac{1}{2} a'_0 m (A_{11} - A_{22}) \cos 2\varphi + c_*, \tag{37}$$

где c_* – произвольная постоянная.

Для нахождения уравнения на функцию $\varphi(t)$ внесем выражения (36), (37) в первое уравнение (35). После преобразований полученного уравнения имеем

$$A_{33} \big(\varphi^{(3)} + m^2 \dot{\varphi} \big) + (a_0 m - \dot{\varphi})(s_1 \sin\varphi + s_2 \cos\varphi) + c^* = 0, \tag{38}$$

$$c^* = {a'}_0^2 m\big[s_3 - \frac{a_0 m^2}{2}(A_{11} + A_{22} - 2A_{33})\big]. \tag{39}$$

Рассмотрим вариант $s_1 = s_2 = 0,\ c^* \neq 0$. Тогда уравнение (38) интегрируется. Его решение запишем в виде

$$\varphi = C_1 \sin mt + C_2 \cos mt + C_3 t \quad \big(C_3 = -\frac{c^*}{m^2 A_{33}}\big), \tag{40}$$

где C_i $(i = \overline{1,3})$ – произвольные постоянные. Подставим (40) в равенства (36), (37):

$$\begin{aligned} u = &-\frac{m^2}{{a'}_0}\big[A_{33}(C_1 \sin mt + C_2 \cos mt) +\\ &+\frac{1}{2}{a'}_0(A_{11} - A_{22})\sin 2(C_1 \sin mt + C_2 \cos mt + C_3 t)\big],\\ v = &-\frac{a_0}{{a'}_0}A_{33} m(C_1 \cos mt - C_2 \sin mt) +\\ &+\frac{1}{2}{a'}_0 m(A_{11} - A_{22})\cos 2(C_1 \sin mt + C_2 \cos mt + C_3 t) + c_*. \end{aligned} \tag{41}$$

Для получения функций $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ необходимо внести выражения (41) в равенства (34). Таким образом, построено решение уравнений (30)–(32). Его главные свойства таковы: нет ограничений на параметры A_{ii} $(i = \overline{1,3}), s_3, \theta_0$; функция $\varphi(t)$ является периодической с периодом $\frac{2\pi}{m}$; скорость прецессии может принимать произвольные значения.

Рассмотрим уравнение (38) при $c^* = 0,\ a_0 = 0$. То есть в силу (39) $s_3 = 0$. Тогда

$$A_{33}(\ddot\varphi + m^2\varphi) - (s_2 \sin\varphi - s_1 \cos\varphi) + c' = 0. \tag{42}$$

Здесь c' – произвольная постоянная. Для интегрирования уравнения (42) умножим левую часть на $\dot\varphi$. Тогда после некоторых преобразований получим

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} = \sqrt{\frac{A_{33}}{2}}(t - t_0), \tag{43}$$

где

$$F(\varphi) = \frac{2}{A_{33}}\big[-(s_2 \cos\varphi + s_1 \sin\varphi) - \frac{1}{2}m^2 A_{33}\varphi^2 - c'\varphi + c''\big]. \tag{44}$$

Здесь c'' – произвольная постоянная. Путем обращения интеграла (43) найдем функцию $\varphi(t)$. Это позволит определить функции (36), (37), а затем из (34) и функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$. В данном решении, в отличие от ранее построенного решения, $\varphi(t)$ не является элементарной функцией времени. Однако имеются и общие свойства данных решений, поскольку во втором решении также нет ограничений на параметры, характеризующие распределение масс, и m.

6. Общий метод исследования. Запишем уравнения (10), (13) в виде линейной системы по $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$:

$$\begin{gathered}\lambda_1(t)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})+\lambda_2(t)(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu})=F_1,\\ \lambda_1(t)\big[m(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu})+\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{a})\big]-\lambda_2(t)\big[m(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})+\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a})\big]=F_2,\end{gathered}\tag{45}$$

решением которой будет

$$\lambda_1(t)=\Delta_1/\Delta,\qquad \lambda_2(t)=\Delta_2/\Delta,\tag{46}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta(t)=-\big[m(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})^2+m(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu})^2+\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu})+\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})\big],\\ \Delta_1=-\big[F_1\big(m(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})+\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a})\big)+F_2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu})\big],\\ \Delta_2=F_2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})-F_1\big(m(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})+\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a})\big),\end{gathered}$$

а

$$\begin{gathered}F_1=k-\dot{\varphi}(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})-m(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}),\\ F_2=\sigma_0\ddot{\varphi}-\sigma_1\dot{\varphi}^2-\dot{\varphi}(\sigma_2\sin\varphi+\sigma_3\cos\varphi+\sigma_4)-\sigma_5\sin 2\varphi-\\ -\sigma_6\cos 2\varphi-\sigma_7\sin\varphi-\sigma_8\cos\varphi-\sigma_9.\end{gathered}$$

Первое соотношение из (45) является интегралом уравнений (11), (12). При $\Delta\neq 0$ уравнения (45) независимы и одно из уравнений системы (11), (12) можно отбросить. Если подставить выражения (46) в уравнение (11), то получим уравнение следующего вида

$$\Phi(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi},A_{ij},\alpha_i\beta_i,s_i,a_0)=0\qquad (i=\overline{1,3}).\tag{47}$$

Если удается найти решение уравнения (46), то условия его существования будут условиями существования полурегулярной прецессии (5). Решение (6), (7) исходной системы тогда можно найти с помощью функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей (47), и равенств (46).

Заключение. В статье рассмотрены условия существования полурегулярных прецессий гиростата в случае, когда на гиростат действует сила тяжести. Показано существование прецессий для вариантов: сферического гиростата с неподвижным центром масс; симметричного гиростата с подвижным центром масс; гиростата, гиростатический момент которого ортогонален оси собственного вращения.

1. *Амелькин Н.И.* О свойствах стационарных движений тела, несущего систему двухстепенных силовых гироскопов // Прикл. математика и механика. – 2011. – **75**, вып. 3. – С. 355–369.
2. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 384 с.
3. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.

4. *Гладун А.В., Ковалев А.М.* Частичная стабилизация стационарных движений спутника с гиродинами // Космічна наука і технології. Додаток. – 2005. – **11**, №1. – С. 11–18.
5. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. – М.; Л.: ОГИЗ, 1949. – Т. 1. – С. 31–152.
6. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – №2. – С. 83–96.
7. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
8. *Liouville J.* Developpement sur un chapitre de la Mecanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1–25.
9. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
10. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
11. *Волкова О.С, Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
12. *Волкова О.С, Гашененко И.Н.* Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки // Современные проблемы математики, механики и информатики / Под ред. Н.Н. Кизиловой, Г.Н. Жолткевича. – Харьков: Изд-во: “Апостроф”, 2011. – С. 74–84.
13. *Возняк А.А.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 45–57.
14. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 64–75.
15. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
16. *Мазнев А.В., Котов Г.А.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 79–83.
17. *Возняк А.А.* Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 69–78.
18. *Котов Г.А.* Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата, несущего два маховика с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 79–89.

G.V. Gorr, E.K. Shchetinina

Semi-regular precessions of a heavy gyrostat carrying two rotors

Conditions for the existence of semi-regular precessions of the first type are established in the problem of motion of a heavy gyrostat carrying two rotors. New solutions of the motion equations for the considered mechanical system are obtained and expressed in terms of elementary or elliptic functions of time.

Keywords: *semi-regular precession, gyrostat, rotor.*

Г.В. Горр, О.К. Щетініна

Напіврегулярні прецесії важкого гіростата, що несе два ротора

Встановлено умови існування напіврегулярних прецесій першого типу в задачі про рух важкого гіростата з двома роторами, що обертаються. Одержано нові розв'язки рівнянь руху розглянутої механічної системи, які виражаються елементарними та еліптичними функціями часу.

Ключові слова: *напіврегулярна прецесія, гіростат, ротор.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Национальный ун-т экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, Донецк
applmech@iamm.ac.donetsk.ua, elena-0607@bk.ru

Получено 15.05.14