

УДК 531.36

©2009. В.Е. Пузырев, А.С. Суйков

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС ПРИ ЧАСТИЧНОЙ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

Рассмотрена задача о движении несимметричного твердого тела относительно центра масс в сопротивляющейся среде. Предполагается, что начальные возмущения могут быть произвольными (сколь угодно большими). Дается качественное описание фазовых траекторий, приводятся их некоторые геометрические характеристики и количественные оценки. Для сравнительного анализа используются результаты численного моделирования.

Задача о вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной точки под действием диссипативного и возмущающих моментов являлась в последние десятилетия объектом изучения многих авторов. Это объясняется не только естественным научным интересом и стремлением исследователя “дойти до сути”, но и широким применением данной модели в ряде задач современной техники, в частности, в задачах стабилизации и ориентации искусственных небесных тел. Из работ последних лет отметим в этой связи [1–5]. При решении подобных задач, наряду с получением условий устойчивости заданного режима движения, которые зачастую находятся на основе анализа линеаризованной системы, оказывается важной оценка области притяжения или устойчивости, другими словами, предельные величины возмущений, которые не выведут объект из строя. Для этого, в свою очередь, важно понимать, как может (и как не может) вести себя изучаемая механическая система под действием больших (не локальных) мгновенных возмущений, и иметь оценку поведения системы на промежуточном этапе – когда возмущенная система “совершает переход” на устойчивый либо неустойчивый режимы движения. Поэтому является важной качественная характеристика решений уравнений движения сразу после получения системой мгновенных возмущений, а также нахождение количественных оценок, связывающих параметры системы и величины возмущений с длительностью переходного временного интервала.

1. Постановка задачи. Общая характеристика движения. Рассматривается система уравнений

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{k}{A}\omega_1 + \frac{B-C}{A}\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = -\frac{k}{B}\omega_2 + \frac{C-A}{B}\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = \frac{A-B}{C}\omega_1\omega_2, \quad (1)$$

описывающая вращательное движение твердого тела вокруг центра масс с учетом действия линейного демпфирующего момента по первым двум проекциям вектора угловой скорости. Здесь A, B и C – главные центральные

моменты инерции тела, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции мгновенной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ на оси ортогональной декартовой системы координат, связанной с этим телом, $k > 0$ – коэффициент сопротивления. В настоящей работе предполагаем выполненным неравенство

$$(A - C)(B - C) > 0, \quad (2)$$

другими словами, моменты инерции различны и третья ось эллипсоида инерции не является средней. Тогда

Утверждение 1. *Единственными стационарными движениями тела являются его равномерные вращения вокруг третьей главной оси.*

В самом деле, принимая во внимание то, что правые части уравнений (1) сохраняют нулевые значения во все время движения, из третьего уравнения заключаем, что либо $\omega_1(t) = \omega_1^0 = 0$, либо $\omega_2(t) = \omega_2^0 = 0$. Если $\omega_1^0 = 0$, то правая часть второго уравнения обратится в нуль только, если $\omega_2 = 0$. Аналогично, если $\omega_2^0 = 0$, то равенство нулю правой части первого уравнения возможно лишь при условии $\omega_1 = 0$. Таким образом, $\omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_3^0$.

Замечание 1. Как нетрудно видеть, уравнения (1) допускают решения $\omega_1 = \omega_1^0 e^{-kt/A}, \omega_2 = \omega_3 = 0$ и $\omega_2 = \omega_2^0 e^{-kt/B}, \omega_1 = \omega_3 = 0$, которым соответствуют неравномерные (монотонно затухающие) вращения вокруг первой или второй осей.

Далее в тексте, если не оговорено противное, под фазовыми траекториями (или решениями системы (1)), будем понимать нетривиальный случай, а потому будем исключать равномерные вращения и решения, указанные в замечании 1.

Утверждение 2. *Фазовые траектории системы (1) не могут пересекать координатных осей фазового пространства или касаться их, хотя могут лежать на них (см. замечание 1).*

Доказательство. Покажем, что утверждение 2 справедливо по отношению к оси абсцисс. Предположим противное, т.е. пусть l – фазовая траектория, которая соответствует решению задачи Коши для системы (1) с начальными значениями $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0$, причем $(\omega_1^0)^2 + (\omega_2^0)^2 \neq 0$. Пусть также существует такой момент времени $t_1 > 0$, что $\omega_1(t_1) = \omega_1, \omega_2(t_1) = \omega_3(t_1) = 0$, другими словами, траектория l проходит через точку $M_1(\omega_1, 0, 0)$ фазового пространства и пересекает или касается оси абсцисс. Однако это противоречит единственности решения задачи Коши для системы (1), поскольку через точку M_1 проходит траектория, соответствующая частному решению

$$\omega_1(t) = \omega_1 e^{-k(t-t_1)/A}, \quad \omega_2(t) = 0, \quad \omega_3(t) = 0.$$

Следовательно, сделанное предположение неверно, и траектории l не существует. Аналогично доказывается справедливость утверждения в отношении двух других осей. \square

Следствие. Касательная к фазовой траектории в произвольной точке не может принадлежать координатной плоскости. Иначе: если в некоторый момент времени t_2 компонента фазового вектора ω_j ($j = \overline{1, 3}$) обращается в нуль, то происходит перемена знака, т.е. $\omega_j(t_2 - 0)\omega_j(t_2 + 0) < 0$. В самом деле, если, например, $\omega_1(t_2) = 0$, то, согласно утверждению 2, $\omega_2(t_2) \neq 0$, $\omega_3(t_2) \neq 0$, тогда из первого уравнения системы (1) следует, что $\dot{\omega}_1(t_2) \neq 0$, и функция времени $\omega_1(t)$, меняет в точке t_2 свой знак на противоположный.

Утверждение 3. Вектор скорости фазового вектора (мгновенная ось ускорений тела) не может быть коллинеарен координатным осям.

Предположим, что существует такой момент времени t_3 , что вектор $\dot{\omega}(t_3)$ коллинеарен орту $\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2)$. Но тогда из второго (первого) уравнения системы (1) имеем

$$\omega_2(t_3) = \frac{C - A}{k} \omega_1(t_3)\omega_3(t_3) \quad (\omega_1(t_3) = \frac{B - C}{k} \omega_2(t_3)\omega_3(t_3)),$$

а из третьего — $\omega_1(t_3) \omega_2(t_3) = 0$. Следовательно, по крайней мере, две компоненты фазового вектора обращаются в нуль, а это противоречит утверждению 2.

2. Асимптотика решений. Некоторые оценки. Приведем одно неравенство, которое будет использоваться ниже.

Пусть x_1, x_2 — независимые переменные, a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные положительные числа. Тогда для любой пары неотрицательных значений x_1, x_2 выполняется двойное неравенство

$$\min\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right)(a_1x_1 + a_2x_2) \leq b_1x_1 + b_2x_2 \leq \max\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right)(a_1x_1 + a_2x_2). \quad (3)$$

В самом деле,

$$a_j \min\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right) \leq a_j \frac{b_j}{a_j} = b_j \leq a_j \max\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right), \quad j = 1, 2,$$

что и обеспечивает выполнение неравенства (3).

Запишем кинетическую энергию и кинетический момент:

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2), \quad \mathbf{G} = (A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3) \quad (4)$$

и рассмотрим положительно определенную вспомогательную функцию

$$V(\omega_1, \omega_2) = \frac{2C T - \mathbf{G}^2}{A(C - A)} = \omega_1^2 + \frac{B(C - B)}{A(C - A)}\omega_2^2. \quad (5)$$

Ее полная производная по времени в силу уравнений (1)

$$\dot{V}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{2k}{A} \left(\omega_1^2 + \frac{C - B}{C - A} \omega_2^2 \right)$$

отрицательно определена и удовлетворяет для любых ω_1, ω_2 неравенствам

$$-2kV \max\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right) \leq \dot{V}_1 \leq -2kV \min\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right),$$

откуда получаем

$$-2k_1 \leq \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \leq -2k_2, \quad k_1 = k \max\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right), \quad k_2 = k \min\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right).$$

Последовательно интегрируя различные части данного двойного неравенства на интервале $[0, t]$ и потенцируя их, имеем

$$\frac{2C T(0) - \mathbf{G}^2(0)}{A(C - A)} e^{-2k_1 t} \leq \omega_1^2(t) + \frac{B(C - B)}{A(C - A)} \omega_2^2(t) \leq \frac{2C T(0) - \mathbf{G}^2(0)}{A(C - A)} e^{-2k_2 t}. \quad (6)$$

Из приведенных рассуждений непосредственно вытекает

Утверждение 4. *Решение системы (1) глобально асимптотически устойчиво по отношению к переменным ω_1, ω_2 , при этом амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону согласно формуле (6).*

Установим, в каких пределах изменяются во время движения кинетическая энергия тела и величина $\gamma = \mathbf{G}^2$. Учитывая, что их полные производные по времени в силу системы (1) равны: $\dot{T} = -k(\omega_1^2 + \omega_2^2)$, $\dot{\gamma} = -2k(A\omega_1^2 + B\omega_2^2)$, получаем неравенства

$$-k_3 V_1(t) \leq \dot{T}(t) \leq -k_4 V_1(t), \quad -2k_5 V_1(t) \leq \dot{\gamma}(t) \leq -2k_6 V_1(t),$$

где

$$k_3 = k \max\left(1, \frac{A(A - C)}{B(B - C)}\right), \quad k_4 = k \min\left(1, \frac{A(A - C)}{B(B - C)}\right),$$

$$k_5 = k \max\left(1, \frac{A - C}{B - C}\right), \quad k_6 = k \min\left(1, \frac{A - C}{B - C}\right).$$

Интегрируя данные неравенства на интервале $[0, t]$, с учетом (6) имеем

$$\frac{k_4}{2k_1} V(0) (1 - e^{-2k_1 t}) \leq T(0) - T(t) \leq \frac{k_3}{2k_2} V(0) (1 - e^{-2k_2 t}), \quad (7)$$

$$\frac{k_6}{k_1} V(0) (1 - e^{-2k_1 t}) \leq \gamma(0) - \gamma(t) \leq \frac{k_5}{k_2} V(0) (1 - e^{-2k_2 t}). \quad (8)$$

Заметим, что из выражений для производных функций $T(t)$, $\gamma(t)$ следует, что эти функции являются монотонно убывающими, кроме того, они ограничены снизу (неотрицательны), следовательно, имеют конечные пределы при $t \rightarrow \infty$. Обозначим эти пределы через T_* и γ_* соответственно. Тогда из неравенств (7), (8), переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, выводим

$$T(0) - \frac{k_3}{2k_2} V(0) \leq T_* \leq T(0) - \frac{k_4}{2k_1} V(0), \quad (9)$$

$$\gamma(0) - \frac{k_5}{k_2} V(0) \leq \gamma_* \leq \gamma(0) - \frac{k_6}{k_1} V(0). \quad (10)$$

Подставим в неравенство (7) выражение кинетической энергии из (4) и разрешим это неравенство относительно $\omega_3^2(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} 2T(0) - \frac{k_3}{k_2} V(0) (1 - e^{-2k_2 t}) - A\omega_1^2(t) - B\omega_2^2(t) &\leq C\omega_3^2(t) \leq \\ &\leq 2T(0) - \frac{k_4}{k_1} V(0) (1 - e^{-2k_1 t}) - A\omega_1^2(t) - B\omega_2^2(t). \end{aligned}$$

Поскольку в силу (3)

$$A \min(1, \frac{C-A}{C-B}) V(t) \leq A\omega_1^2(t) + B\omega_2^2(t) \leq A \max(1, \frac{C-A}{C-B}) V(t),$$

или с учетом неравенств (6)

$$A \min(1, \frac{C-A}{C-B}) V(0) e^{-2k_1 t} \leq A\omega_1^2(t) + B\omega_2^2(t) \leq A \max(1, \frac{C-A}{C-B}) V(0) e^{-2k_2 t},$$

то после упрощений приходим к условию

$$\begin{aligned} 2T(0) - \frac{k_3}{k_2} V(0) + V(0) (\frac{k_3}{k_2} - A \max(1, \frac{C-A}{C-B}) e^{-2k_2 t}) &\leq C\omega_3^2(t) \leq \\ &\leq 2T(0) - \frac{k_4}{k_1} V(0) + V(0) (\frac{k_4}{k_1} - A \min(1, \frac{C-A}{C-B}) e^{-2k_1 t}). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичную оценку можно получить, исходя из неравенства (8).

Так как при $t \rightarrow \infty$ величина кинетической энергии стремится к предельному значению T_* , а переменные ω_1, ω_2 — к нулю, то переменная ω_3 также стремится к некоторому предельному, вообще говоря, ненулевому значению ω_* . Это значение можно оценить, используя формулы (11):

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2} \max(CT(0) - \frac{k_3}{2k_2} CV(0), \gamma(0) - \frac{k_5}{2k_2} V(0)) &\leq \omega_*^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{C^2} \min(CT(0) - \frac{k_4}{2k_2} CV(0), \gamma(0) - \frac{k_6}{2k_2} V(0)). \end{aligned} \quad (12)$$

3. Другие формы записи уравнений движения. Продифференцируем по времени обе части третьего уравнения системы (1) и подставим вместо $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ правые части первых двух уравнений:

$$\ddot{\omega}_3 = \frac{A-B}{C} [-\frac{k(A+B)}{AB} \omega_1 \omega_2 + \omega_3 (\frac{C-A}{B} \omega_1^2 + \frac{B-C}{A} \omega_2^2)].$$

Учитывая, что из (4) следует

$$\omega_1^2 = \frac{-2BT + \gamma + C(B - C)\omega_3^2}{A(A - B)}, \quad \omega_2^2 = \frac{2AT - \gamma - C(A - C)\omega_3^2}{B(A - B)},$$

получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_3 + \frac{k(A + B)}{AB}\dot{\omega}_3 - \frac{1}{ABC}[2(2AB - C(A + B))T + \\ + (2C - A - B)\gamma]\omega_3 + 2\frac{(C - A)(B - C)}{AB}\omega_3^3 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (13) можно рассматривать как однородное уравнение типа Дуффинга с зависящей от времени линейной составляющей восстанавливающей силы. Хотя явная зависимость коэффициента при ω_3 от времени неизвестна, тем не менее, учитывая, что он является медленно изменяющейся функцией времени, с учетом неравенств (7), (8) можно использовать предельные уравнения для оценки поведения $\omega_3(t, \omega_0)$. Отметим также, что в случае $k = 0$ (т.е. в случае Эйлера) уравнение (13) совпадает с уравнением (2.5) из монографии [6].

Перейдем к цилиндрическим координатам по формулам

$$\omega_1 = \rho \cos \frac{\psi}{2}, \quad \omega_2 = \frac{C - A}{B\lambda} \rho \sin \frac{\psi}{2}, \quad \omega_3 = \frac{z}{2}, \quad \lambda = [(C - A)(C - B)/AB]^{1/2},$$

получим

$$\dot{\rho} = -k\alpha\rho [(A + B)/(B - A) + \cos \psi]/2, \quad \dot{\psi} = k\alpha \sin \psi + \lambda z, \quad \dot{z} = -\beta\rho^2 \sin \psi. \quad (14)$$

Здесь $\alpha = (B - A)/AB$, $\beta = (A - B)(A - C)/BC\lambda$. Выразив $\cos \psi$ из первого, а переменную z из второго уравнений (14) и подставив в третье, имеем

$$\ddot{\psi} + \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + k\frac{A + B}{AB}\right)\dot{\psi} + \beta\lambda\rho^2 \sin \psi = 0. \quad (15)$$

Поскольку, согласно (5), имеет место равенство $\rho^2 = V(t)$, уравнение (15) можно рассматривать как уравнение колебаний маятника с вязким трением, зависящим от времени, и частотой колебания, монотонно убывающей до нуля. При $k = 0$ уравнение (15) – уравнение колебаний обычного математического маятника.

Приведем еще одну форму записи уравнений движения в рассматриваемой задаче. Выполним следующее преобразование координат:

$$\omega_1 = \frac{r}{\sqrt{A}} \sin \theta \cos \varphi, \quad \omega_2 = \frac{r}{\sqrt{B}} \sin \theta \sin \varphi, \quad \omega_3 = \frac{r}{\sqrt{C}} \cos \theta.$$

Уравнения (1) в новых переменных принимают вид

$$\dot{r} = -\frac{k}{AB} r \sin^2 \theta (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi),$$

$$\dot{\theta} = -\sin \theta \left[\frac{k}{AB} \cos \theta (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) + \frac{A-B}{\sqrt{ABC}} r \sin \varphi \cos \varphi \right], \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{k}{AB} (B-A) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{ABC}} r \cos \theta (C - A \cos^2 \varphi - B \sin^2 \varphi).$$

В отличие от уравнений (1), которые содержат только “быстрые” переменные, уравнения (16) содержат одну “медленную” переменную – $r = \sqrt{2T}$ – и более удобны, например, в случае применения метода усреднения.

4. Качественное поведение траекторий системы (1). Область устойчивости решений. На рис. 1, а представлены результаты численного интегрирования системы (1) для $A = 3, B = 4, C = 5, k = 0.05, \omega_0 = (3, 0, 1)$, которые дают представление об общем виде траекторий.

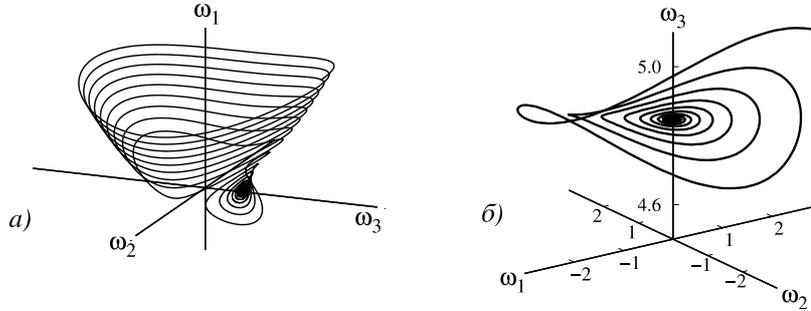


Рис. 1. Траектория системы.

Рассмотрим в качестве невозмущенного движения вращение тела вокруг третьей оси и перейдем к безразмерным переменным – компонентам вектора угловой скорости, отнесенным к скорости вращения тела ω_0 , и быстрому времени $\tau = \omega_0 t$. За параметром k сохраним старое обозначение, но, поскольку теперь он также уменьшен в ω_0 раз, то будем считать его малым. Тогда вид фазовых траекторий существенно зависит от величины начальных возмущений. Если последние достаточно малы, то траектории представляют собой почти плоские спирали, сходящиеся к точке $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_*$ (рис. 1, б). Для количественных оценок при этом достаточно использовать значения декремента затухания и частоты колебаний, получаемые из уравнений первого приближения системы (1)

$$\tilde{\omega}'_1 = -\tilde{k}\tilde{\omega}_1 + \frac{B-C}{A}\tilde{\omega}_2, \quad \tilde{\omega}'_2 = -\frac{A}{B}\tilde{k}\tilde{\omega}_2 + \frac{C-A}{B}\tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\omega}'_j = \frac{\omega_j}{\omega_0}, \quad j = 1, 2; \quad \tilde{k} = \frac{k}{A\omega_0}.$$

Если же начальные возмущения одной из первых двух переменных ω_1, ω_2 превосходят некоторое “пороговое” значение (оно несколько больше единицы и зависит от соотношения между $\omega_1(0)$ и $\omega_2(0)$), то в течение первого

этапа движения изображающая точка находится на удалении от третьей оси. Компоненты вектора угловой скорости, как функции времени, описывают колебательное движение со слабо меняющейся частотой и медленно убывающей амплитудой. Величины последних в значительной степени зависят от начальных возмущений и не могут быть сколько-нибудь удовлетворительно определены только на основе анализа линеаризованной системы. Частоты колебаний двух переменных примерно равны – причем каких именно переменных, зависит от соотношения между моментами инерции и величин начальных возмущений. Частота колебаний третьей переменной вдвое больше. Связь между отношениями моментов инерции A/C , B/C , величинами начальных возмущений и частотами колебаний – нелинейная и не очевидная. Например, при $A = 13$, $B = 12$, $C = 5$, $\omega_3(0) = 1$ изменение начальных значений с $\omega_1(0) = 0.8$, $\omega_2(0) = 1.8$, на $\omega_1(0) = 1.8$, $\omega_2(0) = 0.8$, приводит к уменьшению частоты колебания по всем трем переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в два с половиной раза (рис. 2).

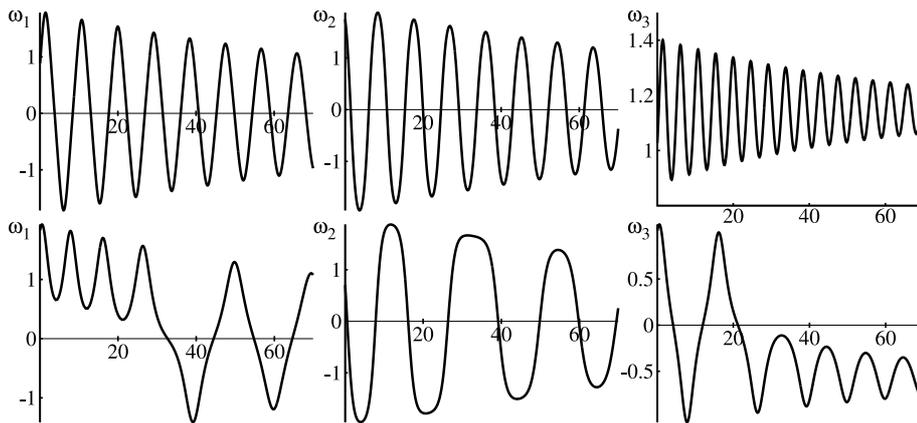


Рис. 2. Зависимость компонент вектора угловой скорости от времени.

Когда амплитуды колебаний первых двух переменных снижаются ниже “порога”, происходит переход на второй этап движения. На рис. 1 первому этапу соответствует движение изображающей точки по стенке “чаши” к ее нижней части (рис. 1 а), а второму – переход на своеобразный боковой “клапан” и “закручивание” в предельную точку.

Пусть $\omega_0 = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30})$ – начальная точка траектории $\omega(t; \omega_0)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = (0, 0, \omega_*)$. Возникает вопрос, как соотносятся ω_{30} и ω_* . В общем случае они не равны, более того, в некоторых случаях они могут значительно отличаться. На рис. 3 показаны результаты численного интегрирования системы (1) для трех различных начальных значений $\omega(0)$. Все три траектории имеют начальные значения с третьей координатой, близкой к $\omega_3(0)$; при

этом предельное значение ω_* для траектории 3 близко к предельному значению для траектории 1, в то время как предельное значение для траектории 2 имеет противоположный знак.

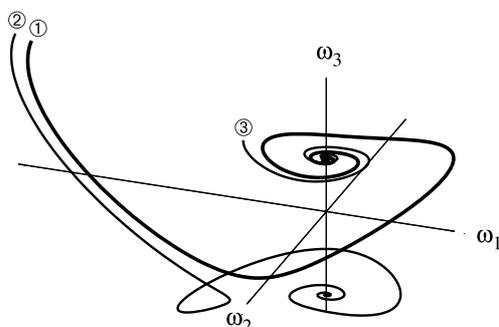


Рис. 3. Поведение близких траекторий.

Будем называть для заданного положительного числа ε областью устойчивости множество начальных значений

$$R(\omega_*, \varepsilon) = \{\omega(0) = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}) : |\omega_3(0) - \omega_*| < \varepsilon\}.$$

Численные эксперименты позволяют предположить что все точки, достаточно близкие к $(0, 0, \omega_*)$, попадают в область $R(\omega_*, \varepsilon)$, однако вне малой окрестности $(0, 0, \omega_*)$ поведение системы не столь предсказуемо. На рис. 4, а показан график предельного значения ω_* при $\omega_3(0) = 1$ и трех различных значениях ρ_0 . При $\rho_0 = 3$ и $\rho_0 = 5$ изменения предельного значения ω_* носят плавный характер, однако при $\rho_0 = 6$ на графике рис. 4, а наблюдаются качественные изменения, соответствующие траекториям типа 2 на рис. 3.

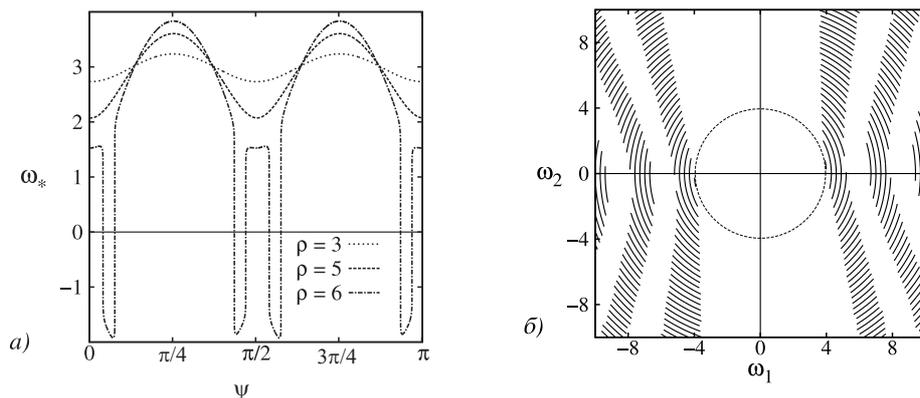


Рис. 4. Зависимость предельного значения ω_* от начальных условий.

Для таких траекторий характерно наличие неравенства $\text{sign}(\omega_*) \neq \text{sign}(\omega_3(0))$. Значения ψ , при которых происходит качественное изменение характера траекторий, меняются при изменении ρ . Рис. 4, б иллюстрирует характер этих изменений; на графике изображена плоскость $\omega_3 = \omega_3(0) > 0$, штриховкой отмечены точки, для которых $\omega_* < 0$.

На рис. 5 изображены полодии вектора угловой скорости $\omega(t)$. На рис. 5, а представлены две полодии, соответствующие решению системы (1) при $k = 0$:

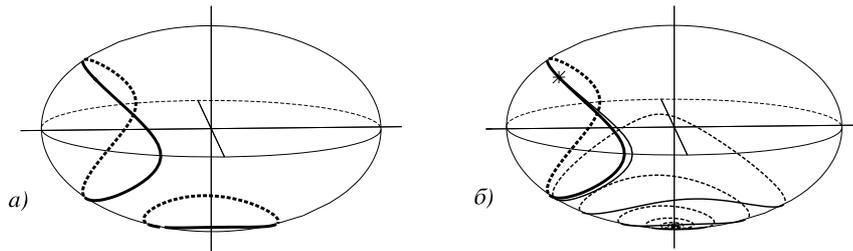


Рис. 5. Полодии на эллипсоиде инерции.

боковая соответствует начальным значениям возмущений, нижняя – начальным значениям, близким к невозмущенным. Полодия на рис. 5, б соответствует решению системы (1) с такими же возмущенными начальными значениями, крестиком отмечено положение конца вектора $\omega(t)$ начальный момент времени. Можно видеть, что фазовая траектория совершает переход с начального предельного положения через второе, близкое к равномерному вращению и далее, к предельной точке – вершине эллипсоида.

1. Ковалев А.М., Исса Салем Абдалла. Стабилизация равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси. – Прикл. механика. – 1992. – 28, N9. – С. 73–79.
2. Зуев А.Л. On partial stabilization of nonlinear autonomous systems: sufficient conditions and examples // Proc. of the European Control Conference ECC'01. – Porto, 2001. – P. 1918–1922.
3. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием сил гравитационного момента в сопротивляющейся среде // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 58–63.
4. Асланов В.С., Тимбай И.А. Движение твердого тела в обобщенном случае Лагранжа. – Самара: Изд-во СГАУ, 2001. – 58 с.
5. Burkov I.V. Asymptotic stabilization of desired rotation in multidimensional Hamiltonian systems by Chetaev method // Proc. 4th Internat. Workshop on Multidimensional Systems. – Wuppertal, 2005. – P. 229–234.
6. Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1983. – 344 с.
7. Рун Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
8. Hassan K. Khalil. Nonlinear systems – Prentice Hall Int., 1996. – 734 с.