УДК 517.95

О. А. Олейник

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается вопрос о единственности решений основных краевых задач для линейной стационарной системы теории упругости и эллиптического уравнения второго порядка в неограниченных областях, а также вопрос об устранимых изолированных особенностях их решений.

Основные краевые задачи для линейной стационарной системы теории упругости в ограниченных областях рассмотрены в [1].

1. Рассмотрим систему теории упругости

$$(a_{kh}^{ij}(x)\,u_{x_j}^h)_{x_i} = f_k,\quad k=1,\dots,n,\quad x\in\Omega,\quad u=(u^1,\dots,u^n),\quad x=(x_1,\dots,x_n),$$

$$f=(f_1,\dots,f_n); \tag{1}$$

$$\lambda_1|\eta|^2 \leqslant a_{kh}^{ij}(x)\,\eta_k^i\eta_h^j \leqslant \lambda_2|\eta|^2,\quad \lambda_1,\ \lambda_2=\mathrm{const}>0;\quad \eta_k^i=\eta_i^k, \tag{2}$$

$$a_{kh}^{ij}(x)=a_{hk}^{ji}(x)=a_{ih}^{kj}(x),\quad i,\ j,\ k=1,\dots,n. \tag{3}$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n. Из (2) и (3) вытекает, что для любой матрицы $\|\eta_k^i\|$

$$\frac{1}{4}\lambda_1\sum_{k,j=1}^{n}(\eta_k^j+\eta_j^k)^2 \leqslant a_{kh}^{ij}(x)\,\eta_k^i\eta_h^j \leqslant \frac{1}{4}\lambda_2\sum_{k,j=1}^{n}(\eta_k^j+\eta_j^k)^2. \tag{4}$$

Коэффициенты $a_{kh}^{ij}(x)$ — ограниченные измеримые функции в области $\Omega\subset R^n$, $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Для системы (1) рассмотрим следующие классические краевые задачи: $u=0$ на $\partial\Omega$ (задача I); $\sigma_k(u)\equiv a_{kh}^{ij}u_{x_j}^h\nu_i=0$, $k=\overline{1,n}$, на $\partial\Omega$ (задача II); $u=0$ на Γ_1, $\sigma(u)=0$ на Γ_2, где $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\partial\Omega$ (задача III); $\sigma(u)+au=0$ на $\partial\Omega$, $a(x)$ — заданная матрица на $\partial\Omega$ (задача IV). Здесь $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\operatorname{mes}\Gamma_1\neq0$, $\operatorname{mes}\Gamma_2\neq0$.

Пусть ω — ограниченная область в R^n. Через $H^1(\omega,\Gamma)$ обозначим класс вектор-функций, полученных пополнением бесконечно дифференцируемых в $\overline{\omega}$ вектор-функций, равных нулю на Γ, $\Gamma\subset\partial\omega$, по норме

$$\|u\|=\Bigl(\int_\omega u^iu^i\,dx+\int_\omega u_{x_j}^k u_{x_j}^k\,dx\Bigr)^{\frac12}.$$

Если $\Gamma=\varnothing$, то $H^1(\omega,\Gamma)$ будем обозначать через $H^1(\omega)$.

Под обобщенным решением задачи I (соответственно задачи II, задачи III) будем понимать вектор-функцию u из класса $H^1(\omega_N,\partial\Omega\cap\partial\omega_N)$ (соответственно из $H^1(\omega_N)$, $H^1(\omega_N,\Gamma_1\cap\partial\omega_N)$), при любом $N\geqslant N_0=\mathrm{const}>0$ удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int_{\omega_N}a_{kh}^{ij}u_{x_j}^h v_{x_i}^k\,dx=\int_{\omega_N}f_kv^k\,dx \tag{5}$$

для любой области $\omega_N=\Omega\cap\{x:|x|<N\}$ и любой вектор-функции $v\in H^1(\omega_N,\partial\omega_N)$ (соответственно $v\in H^1(\omega_N,\partial\omega_N\cap\Omega)$, $v\in H^1(\omega_N,(\partial\omega_N\cap\Omega)\cup(\partial\omega_N\cap\Gamma_1))$.

Под обобщенным решением задачи IV будем понимать вектор-функцию u из класса $H^1(\omega_N)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\int_{\omega_N} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h v_{x_i}^k dx - \int_{\partial\Omega\cap\partial\omega_N} (au, v)\, ds = \int_{\omega_N} f_k v^k dx \tag{6}$$

для любой вектор-функции v из пространства $H^1(\omega_N, \partial\omega_N \cap \Omega)$, $(v, w) \equiv \equiv v^k w^k$. Будем предполагать, что $(a(x)\xi, \xi) \geqslant 0$ для любого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, причем $(a(x)\xi, \xi) \geqslant \alpha |\xi|^2$, $\alpha = \text{const} > 0$, на множестве M положительной меры на $\partial\Omega$.

Теорема 1. Обобщенное решение $u(x)$ задач I, III, IV единственно для любой неограниченной области Ω, а обобщенное решение задачи II определяется с точностью до слагаемого постоянного вектора при $n = 2$ и единственно при $n \geqslant 3$, если при достаточно больших $|x|$ и $n = 2$ имеем $|u(x)| \leqslant C |\ln|x||^{\frac{1}{2}}$ и если при достаточно больших $|x|$ и $n \geqslant 3$ имеем $|u(x)| \leqslant C|x|^{(2-n)/2}$, $C = \text{const}$.

Доказательство. Пусть $\psi(s) = 1$ при $|s| < \frac{1}{2}$, $\psi(s) = 0$ при $|s| > 1$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi \in C_0^\infty(R^1)$. Очевидно, $|\psi'(s)|^2/\psi(s) \leqslant C_0$, $C_0 = \text{const}$. Пусть $n = 2$, $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 — решения одной и той же задачи I, II или III. Вычитая из тождества (5) для u_1 тождество (5) для u_2 и подставляя $v = u\psi^N$, где $\psi^N = \psi(\ln|x|/\ln N)$, получаем

$$\int_{\omega_N} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h u_{x_i}^k \psi^N dx = -\int_{G_N} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h u^k \psi_{x_i}^N dx \leqslant \Big(\int_{G_N} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h u_{x_i}^k \psi^N dx\Big)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\leqslant \Big(\int_{G_N} a_{kh}^{ij} u^h \psi_{x_j}^N u^k \psi_{x_i}^N (\psi^N)^{-1} dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1 \Big(\int_{G_N} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h u_{x_i}^k \psi^N dx\Big)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Big(\int_{G_N} |u|^2 |x|^{-2} dx\Big)^{\frac{1}{2}} |\ln N|^{-1}, \tag{7}$$

где постоянная C_1 не зависит от N, $G_N = \Omega \cap \{x : N^{\frac{1}{2}} \leqslant |x| \leqslant N\}$. Поскольку по условию $|u(x)| \leqslant C |\ln|x||^{\frac{1}{2}}$ при достаточно больших $|x|$, то при больших N

$$\int_{G_N} |u|^2 |x|^{-2} dx \leqslant C_2 (\ln N)^2,$$

где постоянная C_2 не зависит от N. Поэтому из неравенства (7) следует, что

$$\int_{\omega_N} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h u_{x_i}^k \psi^N dx \leqslant C_3 \Big(\int_{G_N} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h u_{x_i}^k \psi^N dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad C_3 = \text{const}. \tag{8}$$

Отсюда вытекает, что интеграл, стоящий в левой части неравенства (8), имеет конечный предел при $N \to \infty$ и поэтому интеграл, стоящий в правой части этого неравенства, стремится к нулю при $N \to \infty$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h u_{x_i}^k dx = 0. \tag{9}$$

Согласно (4) из соотношения (9) вытекает, что $u_{x_j}^h + u_{x_h}^j = 0$, $h, j = 1, \ldots \ldots, n$, и поэтому $u \equiv Ax + B$ (см. [1]), где A — кососимметрическая матрица с постоянными элементами; B — постоянный вектор.

Аналогично с помощью интегрального тождества (6) находим, что если u — решение задачи IV, то $u \equiv Ax + B$. Поскольку $\sigma(Ax + B) = 0$, из граничного условия задачи IV следует, что $Ax + B = 0$ на множестве M. Но множество точек, где $Ax + B = 0$, представляет собой либо линейное многообразие размерности меньшей, чем $n - 1$, либо всю $(n - 1)$-мерную гиперплоскость. В последнем случае коэффициенты уравнений $Ax + B$ должны быть пропорциональны, что невозможно, если матрица A—кососимметрическая и имеет хотя бы один элемент, отличный от нуля. Следовательно, $u = Ax + B$ в случае задач I, IV, III.

Если u — решение задачи II, то $u = B$ при $n = 2$ в силу условия $|u(x)| \leqslant C|\ln|x||^{\frac{1}{2}}$.

Пусть $n \geqslant 3$. В этом случае в интегральное тождество для $u = u_1 - u_2$ подставим $v = u\psi^N$, где $\psi^N = \psi(|x|/N)$. Аналогично тому, как получено (7), находим

$$\int\limits_{\omega_N} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h u_{x_i}^k \psi^N dx \leqslant C_4 \Big(\int\limits_{G_N'} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^k u_{x_i}^h \psi^N dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{G_N'} |u|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} N^{-1}, \tag{10}$$

где $G_N' = \{x : N/2 < x < N\}$; $|u(x)| \leqslant C|x|^{(2-n)/2}$ при больших $|x|$. Поэтому

$$\int\limits_{G_N'} |u|^2 \, dx \leqslant C_5 N^2,$$

где постоянная C_5 не зависит от N. Из (10) следует, что выполнено соотношение вида (9), откуда, как и выше, выводим утверждение теоремы.

Теоремы единственности решений краевых задач для системы теории упругости с постоянными коэффициентами в неограниченных областях с компактной границей доказаны ранее (см. [2—5] и указанную там литературу) с помощью теории потенциала.

Теорема 1 о единственности решений задач I—III с кратким доказательством приведена в [6].

Рассмотрим теперь вопрос об устранимых особенностях решений системы (1). Для системы (1) с постоянными коэффициентами теоремы об устранимых особенностях получены в [4].

Теорема 2. Пусть вектор-функция $u \in H^1(\omega^\delta)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\omega^\delta} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h v_{x_i}^k dx = \int\limits_{\omega^\delta} f_k v^k dx \tag{11}$$

при любом δ, $0 \leqslant \delta < \frac{1}{2}$, любой вектор-функции $v \in H^1(\omega^\delta, \partial\omega^\delta)$, где $\omega^\delta = \{x : \delta < |x| < 1\}$. Пусть $\omega = \{x : |x| < 1\}$. Предположим, что $f \in L^2(\omega)$, $|u(x)| \leqslant C|\ln|x||^{\frac{1}{2}}$, если $n = 2$, и $|u(x)| \leqslant C|x|^{(2-n)/2}$, если $n \geqslant 3$, при $|x| < \gamma$, $\gamma = \mathrm{const} < 1$, $C = \mathrm{const}$. Тогда особенность $u(x)$ в точке $x = 0$ устранима, т. е. $u(x) \in H^1(\omega)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\omega} a_{kh}^{ij} u_{x_j}^h v_{x_i}^k dx = \int\limits_{\omega} f_k v^k dx \tag{12}$$

при любой $v \in H^1(\omega, \partial\omega)$.

Доказательство. Построим в ω обобщенное решение V из пространства $H^1(\omega)$ системы (1) с граничным условием $V = u$ на $\partial\omega$. Рассмотрим $w = u - V$. Очевидно, w удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\omega^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h v_{x_i}^k dx = 0 \tag{13}$$

при любой функции $v \in H^1(\omega^\delta, \partial\omega^\delta)$. Подставим в (13) $v = w\psi^\delta$, где $\psi^\delta = (1 - \psi(\ln \delta/2 \ln |x|)$, если $n = 2$, и $\psi^\delta = 1 - \psi(|x|/2\delta)$, если $n \geqslant 3$. При $n = 2$ получим

$$\int_{\omega^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_i}^k \psi^\delta dx = -\int_{\omega^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w^k \psi_{x_i}^\delta dx \leqslant C_1 \Big(\int_{G^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_i}^k \psi^\delta dx\Big)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Big(\int_{G^\delta} |w|^2 |\ln|x||^{-4} |x|^{-2} dx\Big)^{\frac{1}{2}} |\ln \delta| \leqslant C_2 \Big(\int_{G^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_j}^k \psi^\delta dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$C_1, C_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{14}$$

Здесь $G^\delta = \{x : \delta < |x| < 2\delta\}$ при $n \geqslant 3$ и $G^\delta = \{x : \delta < |x| < \delta^{\frac{1}{2}}\}$ при $n=2$. Из (14) вытекает, что

$$\int_{\omega^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_i}^k \psi^\delta dx \leqslant C_3, \tag{15}$$

где C_3 — постоянная, не зависящая от δ. Учитывая это, находим из (14), что интеграл, стоящий в левой части (15), стремится к нулю при $\delta \to 0$. При оценке интеграла

$$\int_{G^\delta} |w|^2 |\ln|x||^{-4} |x|^{-2} dx \tag{16}$$

мы воспользовались тем, что $|w|^2 \leqslant 2(|u|^2 + |V|^2)$, $V \in H^1(\omega)$, $|u(x)|^2 \leqslant C |\ln|x||$ при $|x| < \frac{1}{2}$.

Оценим интеграл

$$J = \int_{G^\delta} |V|^2 |\ln|x||^{-4} |x|^{-2} dx. \tag{17}$$

Переходя к полярным координатам (r, θ) и делая замену переменной $r = e^{-t}$, получаем

$$J \leqslant C_4 |\ln \delta|^{-2} \int_{G^\delta} |V|^2 |\ln|x||^{-2} dx = C_4 |\ln \delta|^{-2} \int_0^{2\pi} \int_\delta^{\sqrt{\delta}} |V\Phi|^2 |\ln r|^{-2} r^{-1} dr d\theta =$$

$$= C_4 |\ln \delta|^{-2} \int_0^{2\pi} \int_{\ln 2}^{\infty} |V\Phi|^2 t^{-2} dt d\theta,$$

где $\Phi = 0$ при $r > \frac{1}{4}$, $\Phi = 1$ при $r < \frac{1}{8}$, $\Phi \in C^\infty(R^1)$. Применяя неравенство Харди для оценки последнего интеграла, находим

$$J \leqslant C_5 |\ln \delta|^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial (V^i\Phi)}{\partial t}\Big)^2 dt d\theta \leqslant C_6 |\ln \delta|^{-2} \int_\omega \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial (V^i\Phi)}{\partial r}\Big)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C_7 |\ln \delta|^{-2} \|V\|_1,$$

где постоянные C_j не зависят от δ.

При $n \geqslant 3$, учитывая, что $(\psi')^2 \leqslant C_0 \psi$, имеем

$$\int_{\omega^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_i}^k \psi^\delta dx \leqslant C_8 \Big(\int_{G^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_i}^k \psi^\delta dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{G^\delta} |w^2| dx\Big)^{\frac{1}{2}} \delta^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \Big(\int_{G^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_i}^k \psi^\delta dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{G^\delta} |u|^2 dx + \int_{G^\delta} |V|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \delta^{-1}.$$

В силу условия $|u(x)|^2 \leqslant C|x|^{2-n}$ при $|x| < \frac{1}{2}$ получаем

$$\int_{G^\delta} |u|^2\, dx \leqslant C_{10}\delta^2, \quad C_{10} = \mathrm{const}.$$

По неравенству Харди (см. [7, 8]) имеем

$$\int_{G^\delta} |V|^2\, dx \leqslant 4\delta^2 \int_{G^\delta} |V|^2 |x|^{-2}\, dx \leqslant C_{11}\delta^2 \int_{R^n} |\operatorname{grad} V|^2\, dx,$$

если функцию V продолжим так, что $V \in H^1(R^n)$ и $V \equiv 0$ вне шара $|x| > 2$. Из (14) и (17) следует, что

$$\int_{\omega^\delta} a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_i}^k \psi^\delta dx \to 0$$

при $\delta \to 0$ и, следовательно, $a_{kh}^{ij} w_{x_j}^h w_{x_i}^k \equiv 0$ в ω. Отсюда вытекает, что $w = Ax + B$, где $Ax + B$ — жесткое перемещение, т. е. A — кососимметрическая матрица с постоянными элементами; B — постоянный вектор.

Поскольку $w = 0$ на $\partial\omega$, то $w \equiv 0$. Таким образом, $u = V$ и справедливо утверждение теоремы.

Аналогично можно доказать соответствующие теоремы для эллиптического уравнения второго порядка вида

$$(a^{ij}(x)\, u_{x_j})_{x_i} = f, \tag{18}$$

где

$$\mu_1 |\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leqslant \mu_2 |\xi|^2,; \qquad \mu_1,\ \mu_2 = \mathrm{const} > 0;$$

a^{ij} — ограниченные измеримые функции в Ω, $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$. Задачи I — IV определяем для уравнения (18) точно так, как и для системы (1), полагая $\sigma(u) \equiv a^{ij} u_{x_j} \nu_i$. Аналогично находим обобщенные решения этих задач. Будем предполагать, что функция $a(x) \geqslant 0$ и $a > 0$ на множестве M положительной меры.

Теорема 3. Обобщенное решение задачи I, III, IV для уравнения (18) при $n = 2$ единственно, а обобщенное решение u задачи II определяется с точностью до аддитивной постоянной, если $|u(x)| \leqslant C |\ln |x||^{1-\varepsilon}$ при достаточно больших $|x|$; $C,\ \varepsilon = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Пусть $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 — решения одной и той же задачи. Рассмотрим сначала задачи I, II, III. Пусть u — решения задачи I, II или III при $f \equiv 0$. Для функции $u(x)$ и $v = \varphi(u)\, \psi_N$ справедливо интегральное тождество

$$\int_{\omega_N} a^{ij} u_{x_j} v_{x_i} dx = 0, \tag{19}$$

где $\omega_N = \{x : |x| < N\} \cap \Omega$, $\psi^N = \psi(\ln|x|/\ln N)$, $\varphi(u) = u$ при $-1 < u < 1$ и $\varphi(u) = u^\gamma$ при $u > 2$, $\varphi(u) = -|u|^\gamma$ при $u < -2$, $\varphi \in C^\infty(R^1)$, $\varphi'(u) > 0$, $\operatorname{sign}\varphi(u) = \operatorname{sign} u$. Имеем

$$\int_{\omega N} a^{ij} u_{x_j} u_{x_i} \varphi'(u)\, \psi^N dx = -\int_{\omega_N} a^{ij} u_{x_j} \varphi(u)\, \psi_{x_i}^N dx. \tag{20}$$

Так как $\varphi'(u) \geqslant \alpha(|u| + 1)^{\gamma-1}$, $|\varphi(u)| \leqslant \beta(|u| + 1)^\gamma$, $\alpha,\ \beta = \mathrm{const} > 0$, то из (20) получаем

$$\alpha \int_{\omega_N} a^{ij} u_{x_j} u_{x_i} (|u| + 1)^{\gamma-1} \psi^N dx \leqslant C_1 \Big(\int_{G_N} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} (|u| + 1)^{\gamma-1} \psi^N dx\Big)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Big(\int_{G_N} (|u| + 1)^{\gamma+1} |\psi'|^2 |\psi^N|^{-1} |x|^{-2} dx\Big)^{\frac{1}{2}} |\ln N|^{-1} | \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Big(\int\limits_{G_N} a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}(|u|+1)^{\gamma-1}\psi^N dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int\limits_{G_N}(|u|+1)^{\gamma+1}|x|^{-2}dx\Big)^{\frac{1}{2}}(\ln N)^{-1},$$

$$G_N=\Omega\cap\{x:N^{\frac{1}{2}}<|x|<N\}. \qquad (21)$$

Выберем $\gamma>0$ настолько малым, что $\gamma-\varepsilon(\gamma+1)<0$. Тогда из соотношений (21) и условия $|u(x)|\leqslant C|\ln|x||^{1-\varepsilon}$ получаем

$$\int\limits_{\omega_N} a^{ij}u_{x_j}u_{x_i}(|u|+1)^{\gamma-1}\psi^N dx\leqslant C_3\Big(\int\limits_{G_N} a^{ij}u_{x_j}u_{x_j}(|u|+1)^{\gamma-1}\psi^N dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда вытекает, что $a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}=0$, $u\equiv\text{const}$ и $u=0$, если для u выполнено граничное условие задачи I или III, $u\equiv\text{const}$, если u удовлетворяет краевым условиям задачи II.

Рассмотрим теперь краевую задачу IV. Для $u=u_1-u_2$, где u_1, u_2 — решения задачи IV, выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\omega_N} a^{ij}u_{x_j}v_{x_i}dx+\int\limits_{\partial\Omega\cap\partial\omega_N} auvdS=0. \qquad (22)$$

Здесь $v\in H^1(\omega_N,\Omega\cap\partial\omega_N)$. Положим, в (22) $v=\varphi(u)\psi^N(x)$. Так как $\operatorname{sign}\varphi(u)=\operatorname{sign}u$, то второй интеграл в левой части (22) неотрицателен, и поэтому имеют место неравенства (21), откуда вытекает, что $u\equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

Заметим, что условие $|u(x)|\leqslant C|\ln|x||^{1-\varepsilon}$ при больших $|x|$ для задач I и IV точное в том смысле, что ε нельзя в этом условии положить равным нулю. Действительно, $u(x)=\ln|x|$ является нетривиальным решением уравнения $\Delta u=0$ в области $\Omega=\{x: |x|>1\}$ с граничным условием $u=0$ на $\partial\Omega$. Эта функция в области $\Omega=\{x:|x|>2\}$ — решение задачи IV для $\Delta u=0$ с граничным условием $\frac{\partial u}{\partial\nu}+au=0$ на $\partial\Omega$, где $a=(2\ln 2)^{-1}$.

Если $n\geqslant 3$, то непосредственно из принципа максимума (см. [9]) для обобщенных решений уравнения (18) вытекает, что решение задачи I единственно, если $u(x)\to 0$ при $|x|\to 0$. Для доказательства нужно рассмотреть область $\Omega\cap\{x: x<N\}$ и учесть, что $|u(x)|<\varepsilon$ на ее границе $\Omega\cap\{x:|x|=N\}$, если N достаточно велико; $u=0$ на $\partial\Omega\cap\{x:|x|<N\}$ и в силу принципа максимума $|u(x)|<\varepsilon$ в $\Omega\cap\{x:|x|<N\}$, ε — произвольное положительное число. Если область Ω имеет компактную границу и $|u(x)|\to 0$ при $|x|\to\infty$, то в силу принципа максимума, сравнивая $u(x)$ с фундаментальным решением $\Gamma(x)$ уравнения (18), для которого, как доказано в [10], справедливы оценки

$$C_1|x|^{2-n}\leqslant\Gamma(x)\leqslant C_2|x|^{2-n},\quad C_1, C_2=\text{const}>0,$$

получаем $|u(x)|\leqslant C_3|x|^{2-n}$, $C_3=\text{const}>0$. Для решений задач II — IV, если $n\geqslant 3$ и выполнено условие $|u(x)|\leqslant C_3|x|^{2-n}$, доказательство теоремы единственности получаем точно так, как доказана теорема 1.

Если граница Ω некомпактна, то рассмотрим область $\Omega_\varepsilon=\{x:u>\varepsilon\}$, $\varepsilon=\text{const}>0$. Эта область ограничена в силу условия $|u(x)|\to 0$ при $|x|\to\infty$. Рассмотрим функцию $v=u-\varepsilon$ в Ω_ε и $v=0$ в $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$. Как известно, $v\in H^1(\omega_N)$ при любом N. Так как $v=0$ в окрестности бесконечности, то v можно подставить в интегральное тождество (19), где u — решение задачи II при $f\equiv 0$. Отсюда заключаем, что $a^{ij}u_{x_j}u_{x_i}=0$ в точках Ω_ε и, значит, $u\equiv\text{const}$ в Ω_ε. Аналогично доказываем, что $u=\text{const}$ в точках, где $u<-\varepsilon$. Поскольку u непрерывна в Ω, то из доказанного следует, что $u=\text{const}$ в Ω.

Доказательство единственности решения задачи III и IV для уравнения (18) проводится аналогичным образом. Для решения $u(x)$ задачи

III функция v, определенная выше, равна нулю на $\partial\Omega$ в точках Γ_1, где $u=0$. Поэтому v можно подставить в интегральное тождество (19). При доказательстве единственности решения задачи IV при подстановке определенной выше функции v в интегральное тождество (22) при $f\equiv 0$ получим дополнительный член

$$\int\limits_{\partial\Omega\cap\partial\omega_N} a(v+\varepsilon)\,vdS,$$

который имеет знак первого интеграла в этом тождестве. Итак, получаем следующее утверждение

Теорема 4. Обобщенное решение задачи I—IV для уравнения (18) единственно в классе функций $|u(x)|\to 0$ при $|x|\to\infty$ при $n\geqslant 3$.

Теорема 5 (односторонняя теорема Лиувилля). Пусть $n=2$, $u(x)$ удовлетворяет (19) при любой функции $v\in H^1(\omega_N,\ \Omega\cap\partial\omega_N)$ и любом $N>0$, т. е. $u(x)$ является решением задачи II для уравнения (18) при $f\equiv 0$ в Ω. Пусть $u(x)\leqslant C|\ln|x||^{1-\varepsilon}$, $C,\ \varepsilon=\mathrm{const}>0$ при больших $|x|$. (В частности, $\partial\Omega$ может быть пустым множеством, $\Omega=R^2$.) Тогда $u=\mathrm{const}$ в Ω.

Доказательство. Рассмотрим функцию $w=u-K$ в точках, где $u>K$, $w=0$, где $u\leqslant K$, $w\in H^1(\omega_N)$. Подставим в интегральное тождество (19) функцию $v=\varphi(w)\,\psi^N(x)$, где функция $\varphi(w)$ определена при доказательстве теоремы 3. Получаем

$$\int\limits_{\omega_N} a^{ij}w_{x_j}w_{x_i}\varphi'(w)\,\psi^N dx=-\int\limits_{\omega_N} a^{ij}w_{x_j}\varphi(w)\,\psi^N_{x_i}dx.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 3, учитывая, что $0\leqslant w\leqslant C|\ln|x||^{1-\varepsilon}$ и либо $w_{x_i}=u_{x_i}$, либо $w_{x_i}=0$ в точках ω_N, находим, что $w=\mathrm{const}$ на каждом компоненте связности $\{x:u>K\}\cap\Omega$. Так как K — произвольная постоянная, то $u=\mathrm{const}$ в Ω.

Теорема 6. Пусть функция $u\in H^1(\omega^\delta)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\omega^\delta} a^{ij}u_{x_j}v_{x_i}dx=\int\limits_{\omega^\delta} fvdx \tag{23}$$

при любом δ, $0<\delta<\frac{1}{2}$, и любой функции $v\in H^1(\omega^\delta,\partial\omega^\delta)$, где $\omega^\delta=\{x:\delta<|x|<1\}$, $\omega=\{x:|x|<1\}$. Предположим, что $f\in L^2(\omega)$ и при $|x|<\frac{1}{2}$ $|u(x)|\leqslant C|\ln|x||^{1-\varepsilon}$, если $n=2$, и $|u(x)|\leqslant C|x|^{2-n-\varepsilon}$, если $h\geqslant 3$. Тогда особенность $u(x)$ в точке $x=0$ устранима: $u(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\int\limits_{\omega} a^{ij}u_{x_j}v_{x_i}dx=\int\limits_{\omega} fvdx$$

при любой $v\in H^1(\omega,\partial\omega)$ и $u\in H^1(\omega)$.

Доказательство. Пусть V — обобщенное решение уравнения (18) с граничным условием $V=u$ на $\partial\omega$, $V\in H^1(\omega)$. Пусть $w=u-V$ и $\varphi(u)$ — функция, определенная при доказательстве теоремы 3. Подставим в интегральное тождество (23) функцию $v=\varphi(w)\,\psi^\delta$, где ψ^δ определена при доказательстве теоремы 2. Рассмотрим случай $n\geqslant 3$. Аналогично тому, как получено (21), находим

$$\alpha\int\limits_{\omega^\delta} a^{ij}w_{x_j}w_{x_i}(|w|+1)^{\gamma-1}\psi^\delta dx\leqslant C_1\Big(\int\limits_{G^\delta} a^{ij}w_{x_j}w_{x_i}(|w|+1)^{\gamma-1}\psi^\delta dx\Big)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{G^\delta}(|w|+1)^{\gamma+1}|x|^{-2}dx\Big)^{\frac{1}{2}},\quad G^\delta=\{x:\delta<x<2\delta\},\quad C_1=\mathrm{const}.$$

Выберем γ настолько малым, чтобы $|\gamma(2-n+\varepsilon)|<\varepsilon$. Тогда последний интеграл ограничен равномерно по δ и получаем $w=\text{const}$. Аналогично рассматривается случай $n=2$. Теорема доказана.

В работах [11—14] доказаны теоремы единственности для системы теории упругости (1) в классах функций, имеющих конечный интеграл энергии

$$\int_\Omega a_{kh}^{ij}(x)\,u_{x_j}^h u_{x_i}^k dx<\infty,$$

и в классах функций, имеющих конечный интеграл Дирихле

$$\int_\Omega \sum_{k,j=1}^{n}(u_{x_j}^k)^2 dx<\infty.$$

Доказательства теорем единственности в этих классах основаны на неравенствах Корна, которые доказаны в указанных работах для неограниченных областей. Для эллиптического уравнения второго порядка вопрос об изолированных особых точках решений и краевых задачах в неограниченных областях рассматривался в работах [15—18].

1. *Фикер Г.* Теоремы существования в теории упругости.— М. : Мир, 1974.— 149 с.
2. *Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. А.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.— М. : Наука, 1976.— 398 с.
3. *Бурчуладзе Т. В., Гегелия Т. Г.* Развитие метода теории потенциала в теории упругости.— Тбилиси : Мецниереба, 1985.— 199 с.
4. *Бучукури Т. В., Гегелия Т. Г.* Поведение напряжений и смещений вблизи особой точки // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа.— 1986.— 2, № 2.— С. 25—28.
5. *Knops R. J., Payne L. E.* Uniqueness theorems in linear elasticity.— Berlin : Springer Verlag, 1971.— 138 p.
6. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О единственности решений краевых задач в неограниченных областях и об изолированных особых точках решений системы теории упругости и эллиптических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук.— 1987.— **42**, № 4.— С. 189—190.
7. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* Sur un probleme de E. Sanches—Palencia // C. R. Acad. Sci.— 1984.— **299**, ser. 1, N 15.— P. 745—748.
8. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О периодических по времени решениях параболического уравнения во внешних областях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1985.— № 4.— С. 38—47.
9. *Stampacchia G.* Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptique du second ordre a coefficientes discontinues // Ann. Inst. Fourier Grenoble.— 1965.— **15**.— P. 189—258.
10. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular Points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Sci. Norm. Super. Pisa.— 1963.— N 17.— P. 43—77.
11. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Неравенства Корна и теоремы единственности решений краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях // Успехи мат. наук. —1987.— **42**, № 5.— С. 229—231.
12. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О единственности решений краевых задач в неограниченных областях и об изолированных особых точках решений системы теории упругости и эллиптических уравнений второго порядка // Там же.— **42**, № 4.— С. 189—190.
13. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* Asymptotic properties of solutions of the elasticity system // Applications of multiple scaling in mechanics.— Paris; Masson, 1987.— P. 188—205.
14. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О неравенствах Корна и единственности решений классических краевых задач в неограниченных областях для системы теории упругости // Всесоюз. симпоз. по проблемам математической физики.— Тбилиси, 1987.— С. 12—17.
15. *Meyrs N., Serrin J.* The exterior Dirichlet problem for second order elliptic equations // J. Math. and Mech.— 1960.— **9**, N 4.— P. 513—538.
16. *Serrin J., Weinberger H.* Isolated singularities of solutions of linear elliptic equations // Amer. J. Math.— 1966.— **88**, N 1.— P. 258—272.
17. *Serrin J.* Removable singularities of solutions of elliptic equations // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1964.— **17**, N 1.— P. 67—78.
18. *Гилбарг Д., Серрин Дж.* Изолированные особенности решений эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. сб. переводов.— 1958.— **9**, № 6.— С. 13—86.

Моск. гос. ун-т · Получено 12.10.87