

УДК 531.38

©2015. Г.В. Горр, А.В. Мазнев

ПРЕЦЕССИОННЫЕ И ИЗОКОНИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Установлены условия существования прецессионных и изоконических движений твердого тела, описывающихся уравнениями Д. Гриоли.

Ключевые слова: *прецессии, изоконические движения, уравнения Д. Гриоли.*

Введение. В динамике твердого тела и гиростата найдены многочисленные классы движений этих систем [1–3], среди которых важное место занимают прецессионные и изоконические движения. Прецессионные движения характеризуются постоянством угла между двумя векторами, один из которых фиксирован в подвижной системе координат, а другой неподвижен в пространстве. Эти движения находят широкое применение в прикладных задачах теоретической механики. Изоконические движения твердого тела с неподвижной точкой определяются свойством симметричности подвижного и неподвижного аксоидов вектора угловой скорости относительно касательной к ним плоскости. Нахождение таких движений осуществляется с помощью кинематических уравнений П.В. Харламова [4].

Данная работа посвящена исследованию условий существования прецессионных и изоконических движений в задаче, которая описывается дифференциальными уравнениями Д. Гриоли [5]. Использование этих уравнений связано с тем, что они являются наиболее общими уравнениями движения тела с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которые допускают три первых интеграла (геометрический, момента количества движения и энергии). Полученные в статье условия можно применить для уравнений Эйлера–Пуассона и для уравнений Кирхгофа–Пуассона.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения Д. Гриоли [5] в обозначениях монографии [3]:

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + [\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\nu + \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu}] \times \omega + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu} \times \nu, \quad (1)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы

$$A\omega \cdot \omega - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad A\omega \cdot \nu + L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k, \quad \nu \cdot \nu = 1, \quad (3)$$

где E и k – произвольные постоянные.

В (1)–(3) приняты обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $A = A_{ij}$ – тензор инерции в неподвижной точке O ; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную; $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – заданные дифференцируемые функции; $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – дифференцируемая функция, которая либо задана, либо подлежит определению в процессе решения задачи; через $\frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}}$, $\frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ обозначены градиенты функций $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$:

$$\frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \frac{\partial U}{\partial \nu_3} \right), \quad \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \nu_1}, \frac{\partial L}{\partial \nu_2}, \frac{\partial L}{\partial \nu_3} \right). \quad (4)$$

Если в уравнениях (1), (2) положить $\mu = 0$ и

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{1}{2}(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}), \quad (5)$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – постоянные векторы, $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка, то получим уравнения Кирхгофа–Пуассона.

При $B = 0$, $C = 0$ функции (5) таковы: $U = (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu})$, $L = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu})$. Тогда, полагая $\mu = 0$, из (1), (2) получим уравнения движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой.

Уравнения (1), (2) в скалярном виде представляют собой систему шести дифференциальных уравнений, допускающую три первых интеграла (3). Поэтому при рассмотрении (1)–(3) часто уравнения (2) заменяют первыми интегралами [1–3]. В статье [6] показано, что даже в частном случае движения тяжелого твердого тела в результате такой замены могут появиться посторонние решения, т. е. решения, не удовлетворяющие уравнению (2). Поэтому рассмотрим вопрос об интегрировании уравнения (1) на первых интегралах (3).

Будем полагать, что уравнение (2) выполняется, т. е. в процессе редукции (1), (2) указанное уравнение и интегралы (3) включаем в состав приведенной системы. Спроектируем левую и правую части (1) на векторы $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}$ (случай равномерных вращений тела исключаем):

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\left(A\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}), \quad A\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}), \quad (6)$$

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega})^2 + \left[A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\nu} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right] \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (7)$$

Поскольку уравнение (2) выполняется, то интегралы (3) можно продифференцировать только в силу уравнения (2). Выполняя эту операцию, получим уравнения (6). Таким образом, исследование решений уравнений (1), (2) будем вести, принимая во внимание уравнение (2), интегралы (3) и уравнение (7).

2. Условия существования прецессионных движений тела. Рассмотрим прецессионные движения тела, которые описываются уравнениями (1), (2). Как было отмечено в п. 1, в качестве эквивалентной системы будем вместо (1), (2) брать интегралы (3), уравнения (2) и (7).

Пусть $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ – вектор, направленный по третьей координатной оси подвижной системы координат ($\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$). Тогда прецессионные движения тела можно характеризовать инвариантным соотношением

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0, \quad \theta_0 = \angle(\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})), \quad (8)$$

где θ_0 – постоянный параметр. На основе метода инвариантных соотношений [7, 8] продифференцируем обе части (8) в силу уравнения (2):

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\nu}) = 0. \quad (9)$$

Исключая случай равномерных вращений из (9), получим [3]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\nu}. \quad (10)$$

Подставим $\boldsymbol{\omega}$ из (10) в уравнение (2)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})\dot{\varphi}. \quad (11)$$

Функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, входящие в уравнения (10), (11), могут интерпретироваться как углы Эйлера. В силу $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ соотношению (8), геометрическому интегралу $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и уравнению (11), т. е. уравнению (2), можно удовлетворить, положив

$$\nu_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad (12)$$

где $a'_0 = \sin \theta_0$. Из (10) следует

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi}. \quad (13)$$

Поскольку уравнение (2) проинтегрировано, то осталось рассмотреть первые два интеграла из (3) и уравнение (7).

Подставим выражение (10) в первые два соотношения из системы (3). Из полученных равенств определим

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})(E + U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)) - (k - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3))^2}{(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})^2}, \quad (14)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})} [k - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - \dot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})]. \quad (15)$$

В [3] показано, что с учетом выбора вектора $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} = (0, 0, 1)$) при значениях компонент ν_i из (12) выполняются условия

$$(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) > 0, \quad (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 > 0,$$

т. е. формулы (14), (15) не имеют особенностей в знаменателях. Считая, что функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ и $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ заданы, из (14), (15) получим

$$\dot{\varphi}^2 = Q(\varphi), \quad \dot{\psi} = R(\varphi). \quad (16)$$

Первое уравнение из (16) позволяет найти функцию $\varphi(t)$ путем обращения интеграла

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{Q(\varphi)}} = t - t_0. \quad (17)$$

Функцию $\psi(t)$ определим из второй формулы системы (16):

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t R(\varphi(t)) dt. \quad (18)$$

Таким образом, если прецессионное движение (8) является прецессией общего вида (см. (10)), то уравнения (16) определяют функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$.

Регулярные и полурегулярные прецессии в таком методе являются особыми. Если $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$ (n и m – постоянные), то прецессия называется регулярной. Тогда необходимо требовать, чтобы уравнения (16) выполнялись тождественно. Такое условие приводит при заданных функциях $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ к системе равенств на параметры задачи и параметры, входящие в данные функции [3].

Для полурегулярной прецессии первого типа только $\dot{\psi} = m$, где m – постоянная. Первое уравнение из (16) служит для нахождения функции $\varphi(t)$, а второе равенство из этой системы должно быть тождеством по φ (из этого требования находятся условия на параметры задачи и параметры функций $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$).

Для полурегулярной прецессии второго типа $\dot{\varphi} = n$, где n – постоянная. Так как при этом $\varphi = nt$, то из второго уравнения системы (16) получим $\psi = \psi(t)$. Условия существования прецессий второго типа определяют из первого уравнения системы (16).

В монографии [3] приведены результаты, полученные для задачи, в которой функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ имеют вид (5).

Итак, осталось удовлетворить уравнению (7).

Подставив вектор ω из (10) в уравнение (7), найдем значение функции $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ на кривой γ , которая определяется уравнениями

$$\gamma: \quad \nu_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad \dot{\varphi}^2 = Q(\varphi), \quad \dot{\psi} = R(\varphi). \quad (19)$$

В векторном виде имеем

$$\begin{aligned} \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \Big|_{\gamma} = & \left\{ \frac{1}{a_0'^2 \dot{\varphi}} [\ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a})) - \right. \\ & - \dot{\varphi}^2((A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) - a_0(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})) + \dot{\psi}^2((A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) - a_0(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})) + \\ & + \dot{\varphi}\dot{\psi}(a_0'^2 \text{Sp}(A) + 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) - 2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})) + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} - a_0\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \\ & \left. + (\mathbf{a} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}})(\dot{\psi} + a_0\dot{\varphi}) - (\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}})(\dot{\varphi} + a_0\dot{\psi})] \right\} \Big|_{\gamma}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\text{Sp}(A)$ – след матрицы A .

Для получения функции $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ необходимо внести в правую часть уравнения (20) выражения (19) и учесть, что $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, $A = (A_{ij})$. Справедливо

Утверждение 1. *В случае существования прецессии общего вида для заданных дифференцируемых функций $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, функция $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ на прецессиях (19) принимает значения (20).*

Из этого утверждения следует, что параметры θ_0, A_{ij} могут принимать произвольные значения, не нарушающие физический смысл тензора инерции A . В конкретных задачах динамики [1–3] это утверждение может нарушаться. Например, поскольку для уравнений Кирхгофа $\mu = 0$, а функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ имеют вид (5), то уравнение (20) представляет собой тригонометрический многочлен по φ . Требование того, что этот многочлен обращается в нуль для всех φ приводит к условиям существования прецессий общего вида [3]. Для регулярных и полурегулярных прецессий необходимо учитывать последние два равенства из системы (19).

В статье [9] также рассматриваются прецессионные движения для уравнений (1), (2) (в [9] используется термин “безнутационные движения”, который ранее применял Г.Г. Аппельрот [10]). Если следовать обозначениям данной статьи, то допущения статьи [9] можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta) &= P(\theta, \varphi) = \\ &= P_0(\theta_0, \varphi) + (\cos \theta - \cos \theta_0)P_1(\theta_0, \varphi) + (\cos \theta - \cos \theta_0)^2 P_2(\theta_0, \varphi), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} L(\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta) &= Q(\theta, \varphi) = \\ &= Q_0(\theta_0, \varphi) + (\cos \theta - \cos \theta_0)Q_1(\theta_0, \varphi) + (\cos \theta - \cos \theta_0)^2 Q_2(\theta_0, \varphi), \end{aligned} \quad (22)$$

где $P_0(\theta_0, \varphi)$, $Q_0(\theta_0, \varphi)$ – значения функций U и L , вытекающие из интегралов (3):

$$P_0(\theta_0, \varphi) = \frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})] - E,$$

$$Q_0(\theta_0, \varphi) = k - \dot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \dot{\psi}(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}).$$

Здесь ν_i определены равенствами (12). Используя представления (21), (22) в [9], получено уравнение, которое интерпретируется, как необходимое и достаточное условие существования у уравнений (1), (2) инвариантных соотношений (8), (10). Однако, в указанное авторами уравнение значение $\cos \theta_0$ входит в качестве знаменателя и поэтому оно содержит особенность $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Напротив, уравнение (20) не имеет особенностей ни при каких θ_0 .

Отметим, что условие $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ выполняется не только для маятниковых движений тела, но для многих других классов прецессионных движений [9].

Рассмотрим более подробно второе отличительное свойство уравнения (20) и уравнения [9].

Уравнение, которое получено в [9], наряду с функциями $P_1(\theta, \varphi)$, $Q_1(\theta, \varphi)$, содержит производную $\left. \frac{\partial L}{\partial \nu_3} \right|_{\theta=\theta_0}$ (в обозначениях [9] $\left. \frac{\partial f}{\partial \nu_1} \right|_{\theta=\theta_0}$). Приведем цитату [9, стр.3]: “Это и есть необходимое и достаточное условие существования у системы (1), (3) (по нумерации данной статьи (1), (2) – Г. Горр, А. Мазнев) решения с инвариантным соотношением (7) (по нумерации данной статьи (8) – Г. Горр, А. Мазнев), или, другими словами, необходимое и достаточное условие существования безнутацционных движений. Отметим, что этим условием стеснены лишь коэффициенты P_1 и Q_1 в представлениях исходных функций Π и f (по данной статье U , L – Г. Горр, А. Мазнев) разложениями (16) (по данной статье (21), (22) – Г. Горр, А. Мазнев) и $\left. \frac{\partial f}{\partial \nu_1} \right|_{\theta=\theta_0}$. Произвольной остается и функция F (по статье μ – Г. Горр, А. Мазнев)”.

В статье [9] при рассмотрении разложений (21), (22) авторы не говорят об аналитичности данных функций, а лишь отмечают: “а P_1, Q_1 – соответственно первые производные от $P(\theta, \varphi)$ и $Q(\theta, \varphi)$ по $\cos \theta$ ”. Поэтому представляет интерес рассмотрение уравнения (20) в случае, когда функции U и L имеют вид

$$\begin{aligned} U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= U_0(\nu_1, \nu_2, a_0) + (\nu_3 - a_0)U_1(\nu_1, \nu_2, a_0) + \\ &\quad + (\nu_3 - a_0)^2 U_2(\nu_1, \nu_2, a_0) + \dots, \\ L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) &= L_0(\nu_1, \nu_2, a_0) + (\nu_3 - a_0)L_1(\nu_1, \nu_2, a_0) + \\ &\quad + (\nu_3 - a_0)^2 L_2(\nu_1, \nu_2, a_0) + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) следует

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_i} \right|_{\nu_3=a_0} &= \frac{\partial U_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_i} \quad (i = 1, 2), \\ \left. \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} \right|_{\nu_3=a_0} &= U_1(\nu_1, \nu_2, a_0), \\ \left. \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_i} \right|_{\nu_3=a_0} &= \frac{\partial L_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_i} \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} \right|_{\nu_3=a_0} = L_1(\nu_1, \nu_2, a_0).$$

Для наглядности положим в уравнении (20) $A = \text{diag}(A_0, A_0, A_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \Big|_{\gamma} = & \left\{ \frac{1}{a_0'^2 \dot{\varphi}} \left[a_0'^2 A_0 \dot{\varphi} \dot{\psi} + (\mathbf{a} - a_0 \boldsymbol{\nu}) \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\mathbf{a} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}})(\dot{\psi} + a_0 \dot{\varphi}) - (\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}})(\dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi}) \right] \right\} \Big|_{\gamma}, \end{aligned} \quad (25)$$

где, в силу (14), (15):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^2(\varphi) = & \frac{1}{a_0'^2 A_0} \left[2A_0 (U(a_0' \sin \varphi, a_0' \cos \varphi, a_0) + E) - \right. \\ & \left. - (k - L(a_0' \sin \varphi, a_0' \cos \varphi, a_0))^2 \right], \\ \dot{\psi}(\varphi) = & \frac{1}{A_0} \left[k - L(a_0' \sin \varphi, a_0' \cos \varphi, a_0) - a_0 A_0 \dot{\varphi}(\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

На основании (24) найдем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \left[(\mathbf{a} - a_0 \boldsymbol{\nu}) \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right] \Big|_{\nu_3=a_0} = & a_0'^2 U_1(\nu_1, \nu_2, a_0) - \\ & - \left[\nu_1 \frac{\partial U_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_1} + \nu_2 \frac{\partial U_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_2} \right] a_0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \Big|_{\nu_3=a_0} = L_1(\nu_1, \nu_2, a_0), \quad (28)$$

$$\left(\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \Big|_{\nu_3=a_0} = \nu_1 \frac{\partial L_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_1} + \nu_2 \frac{\partial L_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_2} + a_0 L_1(\nu_1, \nu_2, a_0).$$

Из (26)–(28) вытекает, что равенство (25), принимает вид

$$\begin{aligned} \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \Big|_{\gamma} = & \left\{ \frac{1}{a_0'^2 \dot{\varphi}} \left[a_0'^2 (A_0 \dot{\varphi} \dot{\psi} + U_1(\nu_1, \nu_2, a_0) + \dot{\psi} L_1(\nu_1, \nu_2, a_0)) - \right. \right. \\ & - \left(\nu_1 \frac{\partial U_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_1} + \nu_2 \frac{\partial U_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_2} \right) a_0 - \\ & \left. \left. - (\dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi}) \left(\nu_1 \frac{\partial L_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_1} + \nu_2 \frac{\partial L_0(\nu_1, \nu_2, a_0)}{\partial \nu_2} \right) \right] \right\} \Big|_{\substack{\nu_1 = a_0' \sin \varphi, \\ \nu_2 = a_0' \cos \varphi}}, \end{aligned} \quad (29)$$

В уравнении (29) $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ имеют значения (26) и поэтому $\nu_1 = a'_0 \sin \varphi$, $\nu_2 = a'_0 \cos \varphi$ подставляются только в $U_1(\nu_1, \nu_2, a_0)$, $L_1(\nu_1, \nu_2, a_0)$ и выражения в скобках, которые содержат производные функций $U_0(\nu_1, \nu_2, a_0)$, $L_0(\nu_1, \nu_2, a_0)$.

Таким образом, уравнение (29) и уравнение из [9] получены при разных предположениях на характер основных функций.

Отметим, что замечание авторов о том, что функция F произвольна (см. цитату, приведенную выше), математически неточно. Действительно, анализ уравнения [9] показывает, что все функции (например, $\sigma = \sigma(\varphi)$, $\varkappa = \varkappa(\varphi)$, $\sigma'(\varphi)$, $\varkappa'(\varphi)$) зависят только от φ , а функция F является произвольной, т. е. $F(\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi)$ является функцией двух переменных, что невозможно. Поэтому в уравнении [9] необходимо писать $F(\cos \theta_0, \sin \theta_0 \sin \varphi, \sin \theta_0 \cos \varphi)$.

3. Изоконические движения тела. Эти движения можно охарактеризовать инвариантным соотношением [3]:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{c}) = 0, \quad (30)$$

где вектор $\mathbf{c}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом. Направим первую координатную ось подвижной системы координат по вектору $\mathbf{c}$. Тогда для вектора $\mathbf{c}$ имеем: $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$. При анализе изоконических движений используем углы Эйлера θ, φ, ψ , приняв за θ угол между векторами $\mathbf{c}$ и $\boldsymbol{\nu}$. В этом случае компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ и вектора $\boldsymbol{\omega}$ таковы [3]:

$$\nu_1 = \cos \theta, \quad \nu_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \nu_3 = \sin \theta \cos \varphi, \quad (31)$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi. \quad (32)$$

Подставив выражения (31), (32) в равенство (30) и исключив случай равномерных вращений, найдем условие

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi}. \quad (33)$$

В силу (33) компоненты ω_i из (32) принимают вид

$$\omega_1 = \dot{\varphi}(1 + \cos \theta), \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi. \quad (34)$$

Таким образом, если для компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ принять выражения (31), а для компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ – (34), то условие изоконичности (30) выполняется.

Поскольку при подстановке (31), (34) в уравнение (2) получим тождество, то необходимо рассмотреть только интегралы (3) и уравнения (7).

При записи (3) положим компоненту A_{23} тензора (A_{ij}) нулевой. Тогда

$$\begin{aligned} A_{11}\omega_1^2 + A_{22}\omega_2^2 + A_{33}\omega_3^2 + 2(A_{12}\omega_2 + A_{13}\omega_3)\omega_1 &= 2(E + U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)), \\ \omega_1(A_{11}\nu_1 + A_{12}\nu_2 + A_{13}\nu_3) + \omega_2(A_{12}\nu_1 + A_{22}\nu_2) + \omega_3(A_{13}\nu_1 + A_{33}\nu_3) &= \\ &= k - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \end{aligned} \quad (35)$$

Если подставим выражения (31), (34) в равенства (35), то получим два уравнения следующей структуры:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^2 H_1(\theta, \varphi) + \dot{\varphi} \dot{\theta} H_2(\theta, \varphi) + \dot{\theta}^2 H_3(\theta, \varphi) &= H_4(\theta, \varphi), \\ \dot{\varphi} G_1(\theta, \varphi) + \dot{\theta} G_2(\theta, \varphi) &= G_3(\theta, \varphi),\end{aligned}\tag{36}$$

где $H_1(\theta, \varphi), H_2(\theta, \varphi), H_3(\theta, \varphi), G_1(\theta, \varphi), G_2(\theta, \varphi)$ – тригонометрические многочлены. Из (36) найдем функции

$$\dot{\varphi} = R_1(\theta, \varphi), \quad \dot{\theta} = R_2(\theta, \varphi).\tag{37}$$

Укажем явный вид функций $R_i(\theta, \varphi)$ в случае $A = \text{diag}(A_0, A_0, A_0)$:

$$R_1(\theta, \varphi) = \frac{k - L(\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi)}{A_0(1 + \cos \theta)},\tag{38}$$

$$\begin{aligned}R_2^2(\theta, \varphi) &= 2[A_0(1 + \cos \theta)(E + U(\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi)) - \\ &- (k - L(\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi))] A_0^{-2}(1 + \cos \theta)^{-1}.\end{aligned}\tag{39}$$

Из уравнений (37) следует

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{R_1(\theta, \varphi)}{R_2(\theta, \varphi)}.\tag{40}$$

Уравнение (40) является неавтономным дифференциальным уравнением первого порядка. Из него находится функция $\varphi = \varphi(\theta)$. Зависимость $\theta = \theta(t)$ определяется из второго уравнения системы (37)

$$\dot{\theta} = R_2(\theta, \varphi(\theta)) = R(\theta)\tag{41}$$

путем обращения интеграла

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{R(\theta)} = t - t_0.\tag{42}$$

Запишем уравнение (7), используя (31), (34):

$$\begin{aligned}\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \dot{\varphi}(1 + \cos \theta) \left[\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \right. \\ \left. - 2(E + U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot \boldsymbol{\omega} + [2\dot{\varphi}^2(1 + \cos \theta) + \dot{\theta}^2] (k - \right. \\ \left. - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}}) \right] = A\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}).\end{aligned}\tag{43}$$

При рассмотрении (43) будем полагать, что функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ заданы, а функция $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ подлежит определению. Поскольку $\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \neq 0$, то при нахождении $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ из (43) не возникает особенностей. Явный вид этой функции можно получить, учтя в (43) равенства (31), (34), (37); (41), (42). Таким образом, справедливо

Утверждение 2. В случае изоконических движений твердого тела с неподвижной точкой для заданных дифференцируемых функций $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ существует функция $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, если удастся найти $\varphi(\theta)$ из (40), которая на изоконических движениях (31), (34) удовлетворяет уравнению (43).

Как видим из этого утверждения, в условиях существования рассматриваемого класса движений нет ограничений на компоненты тензора (A_{ij}) , кроме тех, которые вытекают из физического смысла этих величин.

Запишем формулу (43) в случае $A = \text{diag}(A_0, A_0, A_0)$:

$$\begin{aligned} \mu(\cos \theta, \sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi) = & \frac{1}{\dot{\theta}[1 + (\varphi'(\theta))^2]} \left\{ A_0 \dot{\theta}^2 [(\varphi'(\theta))^3 \sin^2 \theta + \right. \\ & + (\varphi'(\theta))(1 - \cos \theta) - (\varphi''(\theta)) \sin^2 \theta] - (\varphi'(\theta))(1 + \cos \theta) \left[\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \right. \\ & \left. \left. - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} - 2(E + U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)) \right] - \dot{\theta} [2(\varphi'(\theta))^2 (1 + \cos \theta) + 1] (k - \right. \\ & \left. - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right\} \bigg|_{\substack{\nu_1 = \cos \theta, \nu_2 = \sin \theta \sin \varphi, \nu_3 = \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\theta} = R_2(\theta, \varphi), \dot{\varphi} = R_1(\theta, \varphi)}} \end{aligned} \quad (44)$$

Если функции U и L зависят только от θ , тогда $\theta = \theta(t)$ найдем из (37) в виде квадратуры. Подстановка этой функции в первое уравнение системы (37) приводит к тому, что его правая часть зависит от θ . Следовательно, и $\varphi(t)$ определяется в виде квадратур. Данный частный случай представляет интерес, поскольку в общем случае нахождение решения уравнения (40) и интеграла (42) представляется затруднительным.

4. Прецессионно-изоконические движения. Движения твердого тела, которые характеризуются свойствами прецессионности и изоконичности, называются [3] прецессионно-изоконическими движениями. Следуя [3], запишем инвариантные соотношения для этих движений

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{c}) = 0. \quad (45)$$

Будем предполагать, что $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (c_1, 0, c_3)$. Заметим, что вид вектора $\mathbf{c}$ в (45) не совпадает с тем, который применялся в п. 3 при изучении изоконических движений. Это связано с выбором подвижной системы координат: третью ось направляем по $\mathbf{a}$ и полагаем, что вектор $\mathbf{c}$ лежит в координатной плоскости, перпендикулярной второй оси.

Как показано в [3], существует два класса прецессионно-изоконических движений, для которых прецессионное движение – прецессия общего вида:

$$1. \mathbf{a} = \mathbf{c}, \quad \psi = \varphi; \quad (46)$$

$$2. \mathbf{a} \neq \mathbf{c}, \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{b_0 + c_0 \sin \varphi}, \quad (47)$$

где

$$b_0 = \frac{a_0 c_3 - 1}{a_0 - c_3}, \quad c_0 = \frac{a'_0 c_1}{a_0 - c_3}.$$

При исследовании случаев (46), (47) удобно пользоваться методом для прецессионных движений. Будем, как и ранее, предполагать, что функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ заданы, а функция $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ подлежит определению. Из первых интегралов в случае (46) имеем

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2(E + U(\nu_1, \nu_2, \nu_3))}{A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & [k - L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)]^2 [A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}] - \\ & - 2(E + U(\nu_1, \nu_2, \nu_3))(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} + A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Запишем равенство (20) при условии $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \Big|_{\gamma} = & \left\{ \frac{1}{a_0'^2 \dot{\varphi}} \left[\ddot{\varphi} A(\mathbf{a} + \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) + \dot{\varphi}^2 \left(a_0 (2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \right. \right. \right. \\ & + (A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})) + a_0'^2 \text{Sp}(A) - (2 + a_0)(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) \Big) + \\ & \left. \left. + (\mathbf{a} - a_0 \boldsymbol{\nu}) \cdot \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \dot{\varphi}(a_0 + 1)(\mathbf{a} - \boldsymbol{\nu}) \cdot \frac{\partial L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right] \right\} \Big|_{\gamma}. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь кривая γ определяется соотношениями (19). При исследовании уравнений (48)–(50) можно считать, что задана только функция $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Тогда уравнение (49) служит для нахождения функции $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Практический интерес представляет случай, когда $\mu = 0$, U и L имеют вид (5), $A = \text{diag}(A_0, A_0, A_0)$. Из (48)–(50) получим

$$\dot{\varphi} = \frac{f_2(\varphi)}{A_0(1 + a_0)}, \quad 2f_2^2(\varphi) - A_0(1 + a_0)g_2(\varphi) = 0, \quad (51)$$

$$\dot{\varphi}^2 A_0 a_0'^2 + (\mathbf{a} - a_0 \boldsymbol{\nu}) \cdot (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}) + \dot{\varphi}(a_0 + 1)(\mathbf{a} - \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}) = 0, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(\varphi) &= b_2 \cos 2\varphi + b'_2 \sin 2\varphi + b_1 \cos \varphi + b'_1 \sin \varphi + b_0, \\ g_2(\varphi) &= c_2 \cos 2\varphi + c'_2 \sin 2\varphi + c_1 \cos \varphi + c'_1 \sin \varphi + c_0. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{a_0'^2}{4}(B_{22} - B_{11}), \quad b_2' = \frac{a_0'}{2}B_{12}, \quad b_1 = a_0'(a_0B_{23} - \lambda_2), \\
 b_1' &= a_0'(a_0B_{13} - \lambda_1), \quad b_0 = \frac{1}{4}[a_0'^2(B_{11} + B_{22}) + 2a_0^2B_{33}] - a_0\lambda_3 + k, \\
 c_2 &= \frac{a_0'^2}{2}(C_{11} - C_{22}), \quad c_2' = -a_0'^2C_{12}, \quad c_1 = 2a_0'(s_2 - a_0C_{23}), \\
 c_1' &= 2a_0'(s_1 - a_0C_{13}), \quad c_0 = 2E + 2a_0s_3 - \frac{1}{2}[a_0'^2(C_{11} + C_{22}) + 2a_0^2C_{33}].
 \end{aligned} \tag{54}$$

Второе уравнение из (51) должно быть тождеством по φ . На основании (53), (54) найдем условия на параметры задачи. Запишем их для случая

$$\lambda_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{23} = 0. \tag{55}$$

Тогда

$$C_{22} - C_{11} = \frac{2(a_0B_{13} - \lambda_1)^2}{A_0(1 + a_0)}, \quad C_{12} = 0, \tag{56}$$

$$\frac{1}{2}b_1'^2 + b_0^2 = 2A_0c_0(1 + a_0), \tag{57}$$

$$b_0 = \frac{2(a_0 + 1)A_0(s_1 - a_0C_{13})}{a_0B_{13} - \lambda_1}. \tag{58}$$

Равенства (55), (56) служат условиями на параметры задачи. Из равенства (58) в силу (54) определяется значение постоянной k . Равенство (57) с учетом (54), (58) можно рассматривать как уравнение для нахождения постоянной E . Так как $a_0 + 1 \neq 0$, то имеем линейное уравнение на эту постоянную.

На основании условий (55) для $\dot{\varphi}$ из первого уравнения (51) получим

$$\dot{\varphi} = \frac{b_1' \sin \varphi + b_0}{A_0(1 + a_0)}. \tag{59}$$

Используя (55), (56), (59), распишем уравнение (52):

$$\begin{aligned}
 &(1 - a_0)(b_1' \sin \varphi + b_0)^2 + a_0a_0'^2(a_0B_{13} - \lambda_1)^2 \cos 2\varphi - \\
 &- a_0'(1 + a_0)A_0[(1 - 2a_0)C_{13} + a_0s_1] \sin \varphi + \\
 &+ (1 + a_0)(b_1' \sin \varphi + b_0)[a_0(B_{13}(2a_0 - 1) - \lambda_1) \sin \varphi + \\
 &+ (1 - a_0)(\lambda_3 - a_0B_{33} + (1 + a_0)B_{11})] + \\
 &+ A_0(1 + a_0)[a_0'^2s_3 + \frac{a_0}{2}(a_0'^2(C_{11} + C_{22}) + 2a_0^2C_{33})] = 0.
 \end{aligned} \tag{60}$$

Уравнение (60) должно быть тождеством по переменной φ . Это условие приводит к трем равенствам, которым должны удовлетворять параметры задачи. Из первого равенства найдем

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}B_{13}(a_0 - 1). \quad (61)$$

Второе равенство служит условием на параметр s_1 , а третье равенство – на параметр s_3 . Разрешимость этих условий следует из того, что параметры s_1, s_3 входят в указанные равенства линейно. При выполнении (61) выражение $a_0 B_{13} - \lambda_1 \neq 0$ и поэтому прецессия не вырождается в регулярную прецессию

Данный класс движений можно получить на основе уравнений (6.126), (6.127), указанных в [3] (этот случай в [3] не рассматривается).

Таким образом, указан новый класс прецессионно-изоконических движений в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Аналогично рассматривается и класс движений, описываемый и формулой из (47).

Заключение Рассмотрены условия существования прецессионных и изоконических движений твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены уравнения для определения значений функции $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ на инвариантных соотношениях, задающих данные движения.

1. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
2. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
3. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
4. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 703–707.
5. *Grioli G.* Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. – 1963. – **35**, № 1–2. – Р. 35–39.
6. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Харламова Е.И.* Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 3–9.
7. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
8. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
9. *Мозалевская Г.В., Орешкина Л.Н.* Безнутационные движения твердого тела // Механика твердого тела. – 1991. – Вып. 23. – С. 1–5.
10. *Аппельрот Г.Г.* Простейшие случаи движения тяжелого несимметричного гироскопа С.В. Ковалевской // Мат. сб. Круглая любительская мат. наук. – 1910. – **27**, вып. 3. – С. 262–334.

G.V. Gorr, A.B. Maznev

Precession and isoconic motions of a rigid body under the potential and gyroscopic forces

The conditions of existence of precession and isoconic motions of a rigid body are established. The conditions are described by Grioli's equations.

Keywords: *precessions, isoconic motions, Grioli's equations.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;
Донецкий гос. ун-т
vgorr@gmail.com, maznev_av@rambler.ru

Получено 25.09.15