

УДК 531.55:521.2

©2009. Я.С. Зинкевич, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская

БЫСТРЫЕ ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО И СВЕТОВОГО МОМЕНТОВ

Исследуется быстрое вращательное движение динамически несимметричного спутника относительно центра масс под действием гравитационного и светового моментов в сопротивляющейся среде. Орбитальное движение с произвольным эксцентриситетом предполагается заданным. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо и применения модифицированного метода усреднения. Рассмотрено движение в частном случае динамически симметричного спутника.

Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованиям вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления, сопротивления среды и др.), близким к проведенному ниже, посвящены работы [1–12].

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления, гравитационного притяжения и сопротивления среды.

Введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигелия орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигелии, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана со спутником и ориентирована по вектору кинетического момента \mathbf{G} . Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} , ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [1–3]. Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Положение главных центральных осей инерции относительно осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей Oz_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ , как показано в [1–3].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= G \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) \cos \theta + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\
 \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь L_i – моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G – величина кинетического момента, A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику – кинетическую энергию T , производная которой имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dt} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) \cos \theta + \right. \\
 &\left. + \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) \sin \varphi \cos \varphi (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right].
 \end{aligned} \tag{2}$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e^2)^3}{\ell_0^3}}, \tag{3}$$

где ℓ_0 – фокальный параметр орбиты, ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты, μ – гравитационная постоянная.

Проекция L_i момента приложенных сил складывается из гравитационного момента L_i^g , момента сил светового давления L_i^c и момента сил сопротивления среды L_i^r .

Приведем проекцию гравитационного момента на ось Oy_1 (проекции на другие оси имеют аналогичный вид)

$$L_1^g = \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \theta)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}), \quad (4)$$

$$S_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta, \quad \beta_2 = \sin(\nu - \lambda),$$

$$\beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta.$$

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии \mathbf{k} направлен вдоль оси Oz_3 . Как показано в [1, 4], в этом случае для момента сил светового давления, действующего на спутник, имеет место формула

$$\mathbf{L}^c = (a_c(\varepsilon_s) R_0^2 / R^2) \mathbf{e}_r \times \mathbf{k}, \quad a_c(\varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) Z'_0(\varepsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0}{c} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \quad (5)$$

Здесь \mathbf{e}_r – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ε_s – угол между направлениями \mathbf{e}_r и \mathbf{k} , так что $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{k}| = \sin \varepsilon_s$; R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 – фиксированное значение R , например, в начальный момент времени; $a_c(\varepsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S – площадь “тени” на плоскости, нормальной к потоку; Z'_0 – расстояние от центра масс до центра давления; p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c – скорость света; E_0 – величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца.

Полагаем [1], что в силу симметрии функция $a_c(\varepsilon_s)$ имеет вид $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ и аппроксимируем ее тригонометрическим полиномом по степеням $\cos \varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в виде $a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots$. Рассмотрим второй член разложения, когда $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_1 \cos \varepsilon_s$ в предположении, что $a_1 \sim \varepsilon^2$.

В работе предполагается, что момент сопротивления \mathbf{L}^r может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = \mathbf{I}\omega$, где тензор \mathbf{I} имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i , связанной с телом [1, 9, 10]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости ε^2 : $\|\mathbf{I}\| / G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$, где $\|\mathbf{I}\|$ – норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени.

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения.

2. Модифицированная процедура метода усреднения. Для рассматриваемой задачи решения системы (1)–(3) при малом ε на промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$ будем применять модифицированную схему метода усреднения

[2, 13, 14]. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины $G, \delta, \lambda, T, \nu$ обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ – некоторые функции времени t [15]. Медленными переменными в возмущенном движении будут $G, \delta, \lambda, T, \nu$, а быстрыми – углы Эйлера φ, ψ, θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1 . Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \quad (6)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо в правые части уравнений движения (1), (2) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t по схеме, предложенной в [2] для нерезонансного случая. При этом для медленных переменных δ, λ, G, T сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -\frac{G}{R(k)} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad \left. + I_{11}(A_2 - A_3)[1 - W(k)] \right\}, \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{2T}{R(k)} \left\{ I_{22}(A_1 - A_3)W(k) + I_{33}(A_1 - A_2)[k^2 - W(k)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}{S(k)} \left\{ \frac{I_{33}}{A_3}[k^2 - W(k)] + \frac{I_{22}}{A_2}(1 - k^2)W(k) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_{11}(A_2 - A_3)R(k)}{A_1 S(k)} [1 - W(k)] \right\}, \\ \frac{d\delta}{dt} &= -a_1 R_0^2 (2GR^2)^{-1} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) - \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3} \beta_2 \beta_3 N^*, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -a_1 R_0^2 (GR^2)^{-1} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) + \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3 \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^*, \\ W(k) &= 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, R(k) = A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2, \\ S(k) &= A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \left[3b^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right] \quad \text{при } 2TA_2 - G^2 > 0, \\
 H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3b^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] - 1 \right\} \quad \text{при } 2TA_2 - G^2 < 0, \\
 b^2 &= \frac{\sigma + q}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{A_3}{A_1} \frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_3}, \quad q = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}, \\
 N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left(\frac{2A_1 T}{G^2} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right].
 \end{aligned}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [16]. Из уравнений (7) следует, что под влиянием сопротивления среды происходит эволюция как кинетической энергии тела T , так и величины кинетического момента G . Непосредственно видно, что в первом приближении на их изменение оказывает влияние только сила сопротивления, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Члены, содержащие недиагональные компоненты I_{ij} ($i \neq j$), выпадают при усреднении. Изменения углов λ , δ зависят от действия силы сопротивления и гравитационного притяжения, а также момента сил светового давления.

Дифференцируя выражение для (6) k^2 и используя два первых уравнения системы (7), получим дифференциальное уравнение, определяющее зависимость k от ξ

$$\begin{aligned}
 \frac{dk^2}{d\xi} &= (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)}, \\
 \chi &= (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2) / [(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2], \\
 \xi &= (t - t_*)/N, \quad N = A_1A_3 / (I_{33}A_1 - I_{11}A_3) \sim \varepsilon^{-2}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь t_* – постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо. Уравнение (8) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента \mathbf{G} на сфере радиуса G . Первое уравнение (7) описывает изменение радиуса сферы с течением времени.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (7) для G положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы [16] неравенства $(1 - k^2)K \leq E \leq K$. Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2 , причем одновременно они все в нуль обратиться не могут. Поэтому $dG/dt < 0$ поскольку $G > 0$, т.е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0, 1]$. Аналогично показываем, что кинетическая энергия также строго убывает.

Основным этапом в исследовании движения тела является анализ уравнения (8). Отметим, что на эволюцию k^2 оказывает влияние только сопротивление среды, и в силу того, что это уравнение интегрируется самостоятельно, происходит частичное разделение влияния гравитационного и светового моментов, а также сопротивления. Полное разделение в данном случае не имеет места, так как медленно убывающие переменные G, T входят в правые части уравнений (7) для λ и δ . Уравнение (8) совпадает с уравнением, описывающим движение тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [9] и движение спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде [11].

Нетрудно проверить, что для величины χ из (8) справедливы равенства

$$\chi = \frac{A_3\chi_1 - A_1\chi_2}{A_3\chi_1 + A_1\chi_2}, \quad \chi_1 = I_{22}A_1 - I_{11}A_2, \quad \chi_2 = I_{33}A_2 - I_{22}A_3,$$

откуда следует, что так как величины χ_1, χ_2 могут принимать любые значения, то в зависимости от параметров задачи A_i, I_{ii} ($i = 1, 2, 3$) величина χ изменяется в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$.

Численное интегрирование уравнения (8) при начальном условии $k^2(0) \approx 1$ показывает, что функция k^2 монотонно убывает с ростом ξ , причем тем быстрее, чем больше χ . Проведенный численный расчет уравнения (8) приведен на рис. 1 для $\chi = -3; 0; 1; 3; 5; 8$. Видно, что чем больше χ , тем быстрее убывает функция k^2 . Заметим, что для $\chi < -3$ появляются новые качественные эффекты, а при $\chi > 3$ характер решения тот же, что и при $|\chi| \leq 3$.

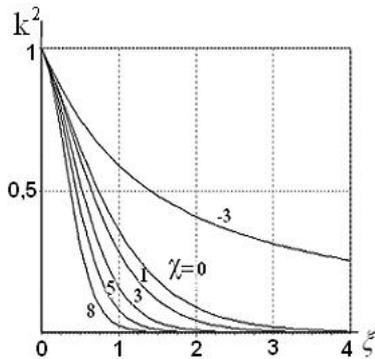


Рис. 1.

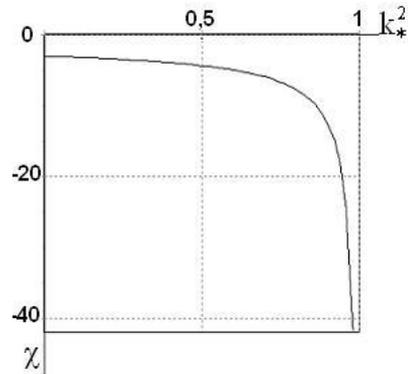


Рис. 2.

Уравнение (8) для k^2 допускает стационарные точки $k^2 = k_*^2$ при $\chi < -3$, когда независимо от G и T величина k^2 определяемая уравнением (8), остается постоянной при соответствующем выборе начальных условий. Необходимо отметить, что при $\chi > -3$ таких стационарных точек (кроме $k = 0, k = 1$) не существует.

Для определения квазистационарных решений $k^2 = k_*^2$ приравняем нулю правую часть (8). Полученное уравнение разрешим относительно χ

$$\chi = \frac{k^2 - 1 + (1 + k^2)E(k)/K(k)}{(1 - k^2)[E(k)/K(k) - 1]}. \quad (9)$$

График зависимости χ от k_*^2 , построенный по формуле (9), изображен на рис. 2. Из него видно, что при любом $\chi < -3$ существует единственное значение $k_*^2 \in (0, 1)$, которое отвечает квазистационарному движению. Расчет производился для $k_*^2 = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8$.

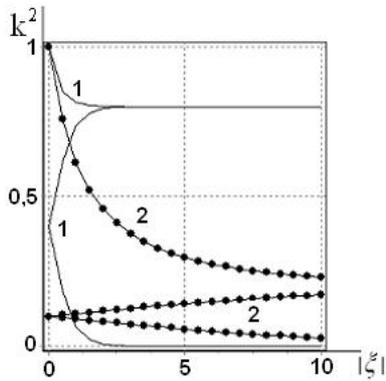


Рис. 3.

На рис. 3 изображены типичные графики функций $k^2(\chi, \xi)$, полученные в результате численного интегрирования уравнения (8). Для заданных значений k_*^2 , согласно уравнению (9), определялось значение величины $\chi = \chi_*$, а затем производилось численное интегрирование уравнения (8) при полученном значении χ_* . Сплошная кривая получена при $k_*^2 = 0.8$, а кривая с маркерами — при $k_*^2 = 0.2$. Каждый график содержит по три ветви. В качестве начального условия для верхних ветвей выбиралось $k^2(0) = 1$. Две нижние ветви для каждого графика были построены при начальных условиях $k^2(0) = 0.5k_*^2$. При этом возрастающая ветвь отвечает интегрированию для $\xi > 0$, а убывающая ветвь является зеркальным отражением относительно прямой $\xi = 0$ зависимости $k^2(\chi, \xi)$, полученной при $\xi < 0$.

Уравнение (8) является автономным, поэтому решение $k^2(\chi, \xi)$ может быть определено при любых начальных условиях. Выбор соответствующей ветви графика позволит определить характер изменения величины k^2 . Так, при начальном значении $k^2 = k_0^2 > k_*^2$ берется верхняя ветвь, а если $0.5k_*^2 \leq k_0^2 < k_*^2$, то — средняя. Если же $k_0^2 < 0.5k_*^2$, то берется нижняя ветвь, для которой движение происходит при отрицательном ξ с возрастанием величины k^2 до $k^2 = 0.5k_*^2$, а затем переходим на среднюю ветвь.

3. Ориентация вектора кинетического момента. Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (7).

Как известно, $R = \ell_0/(1 + e \cos \nu)$, а фокальный параметр орбиты ℓ_0 определяется равенством $\ell_0 = \mu^{1/3}(1 - e^2)/\omega_0^{2/3}$. Тогда два уравнения (7), характеризующие изменения углов ориентации вектора кинетического момента, примут вид

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_0^{4/3}(1 + e \cos \nu)^2}{2G(1 - e^2)^2} \sin 2(\lambda - \nu) \sin \delta \left\{ -\frac{a_1 H R_0^2}{\mu^{2/3}} + \frac{3\omega_0^{2/3}(1 + e \cos \nu)}{2(1 - e^2)} N^* \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\omega_0^{4/3}(1+e\cos\nu)^2}{G(1-e^2)^2} \cos^2(\lambda-\nu) \cos\delta \left\{ -\frac{a_1 H R_0^2}{\mu^{2/3}} + \frac{3\omega_0^{2/3}(1+e\cos\nu)}{2(1-e^2)} N^* \right\}.$$

Проведем обезразмеривание уравнений (7) изменения кинетического момента и кинетической энергии, уравнений (3) для истинной аномалии и уравнений (8), (10). Характерными параметрами задачи являются G_0 – кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Безразмерные величины определим формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = G/G_0$, $\tilde{A}_i = A_i \Omega_0 / G_0$, $\tilde{L}_i = L_i / (G_0 \Omega_0)$, $\tilde{T} = T / (G_0 \Omega_0)$, $\varepsilon^2 \tilde{I}_{ii} = I_{ii} / G_0$.

Введем обозначение

$$\Gamma = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \mu^{2/3} \omega_0^{2/3}} \quad (11)$$

и назовем эту величину приведенным коэффициентом момента сил светового давления.

После обезразмеривания уравнения для λ , δ и ν можно записать следующим образом:

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \quad \frac{d\nu}{d\tilde{t}} = \varepsilon \frac{(1+e\cos\nu)^2}{h(e)}. \quad (12)$$

Здесь Δ , Λ – коэффициенты в правых частях первого и второго уравнений (12), $h(e) = (1-e^2)^{3/2}$; δ , λ – медленные переменные, а ν – полумедленная. Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [14]

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1+e\cos\nu)^2} d\nu, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, \nu)}{(1+e\cos\nu)^2} d\nu.$$

После усреднения получим

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{\cos\delta}{2\tilde{G}(1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{3\tilde{N}^*}{2(1-e^2)^2} - \Gamma\tilde{H} \right). \quad (13)$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$ при начальных условиях $\tilde{G}(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\delta(0) = 0.785$; $\lambda(0) = 0.785$ и значениях главных центральных моментов инерции тела $\tilde{A}_1 = 3.2$; $\tilde{A}_2 = 2.6$;

$\tilde{A}_3 = 1.67$. Численный расчет выполнялся для различных видов орбит с эксцентриситетом: $e = 0$ – круговая орбита; $e = 0.421$ – сильно эллиптическая орбита [1]. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $\tilde{I}_{11} = 2.322$; $\tilde{I}_{22} = 1.31$; $\tilde{I}_{33} = 1.425$ и $\tilde{I}_{11} = 0.919$; $\tilde{I}_{22} = 5.228$; $\tilde{I}_{33} = 1.666$. В первом случае величина χ из уравнения (8) была отрицательной -4.477 , а во втором -3.853 . Численный анализ показывает, что функции $G(\tau)$ и $T(\tau)$ являются монотонно убывающими (рис. 4, 5).

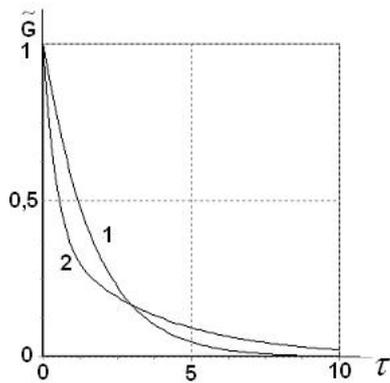


Рис. 4.

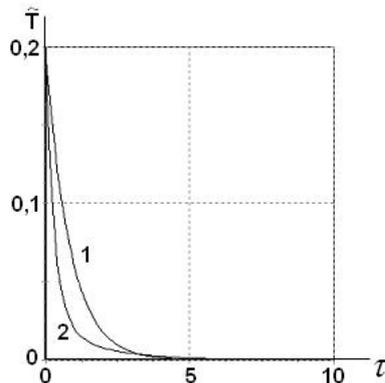


Рис. 5.

Видно, что при положительной величине χ (кривые 2) функции убывают быстрее, но функция $G(\tau)$ стремится к асимптоте медленнее за больший промежуток времени. Функция $\lambda = \lambda(\tau)$ в обоих расчетных вариантах величины χ при $\Gamma = 1$ является убывающей функцией, но во втором варианте убывает быстрее (рис. 6). Необходимо отметить, что при изменении эксцентриситета орбиты в расчетах в обоих вариантах при $\Gamma = 1$ увеличение e приводит к более быстрому убыванию угла λ . На рис. 7 показаны графики функции $\lambda = \lambda(\tau)$ при $e = 0$ (кривая 1) и $e = 0.421$ (кривая 2) при положительном χ .

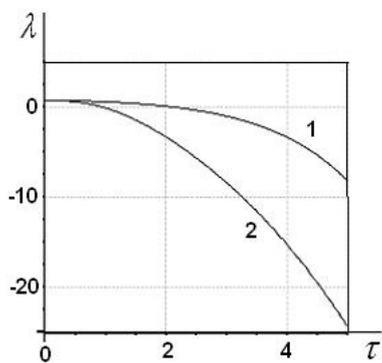


Рис. 6.

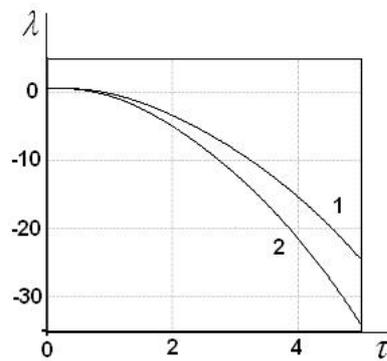


Рис. 7.

Аналогичный характер зависимости угла ориентации λ от эксцентриситета орбиты был получен в случае движения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [11]. Ввиду того, что со временем величина угла λ уменьшается, вращение вектора \mathbf{G} в пространстве вокруг нормали к плоскости орбиты происходит на постоянном угловом расстоянии δ от нее в направлении по ходу часовой стрелки.

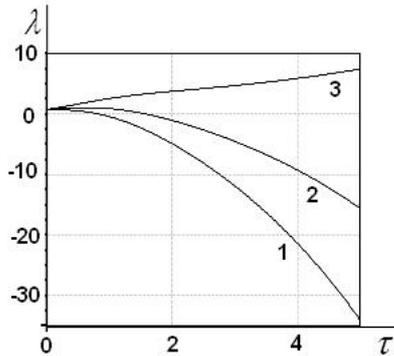


Рис. 8.

Из сказанного позволяет сделать вывод, что в случае существенного влияния момента сил светового давления на спутник вращение вектора \mathbf{G} в пространстве вокруг нормали к плоскости орбиты происходит на постоянном угловом расстоянии δ от нее в направлении против хода часовой стрелки.

Рассмотрим движение при условии $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось Oz_3 . В этом случае в равенстве (6) и в уравнениях системы (7) необходимо поменять местами A_1 и A_3 , а также I_{11} и I_{33} . Кроме того, величину χ в уравнении (8) заменим на $-\chi$, а в уравнении (8) добавим знак “минус”. Начальные условия сохраняют те же значения. Величина χ в обоих расчетных вариантах сохраняет свои значения, а функции $G(t)$ и $T(t)$ также являются монотонно убывающими.

Угол δ остается постоянным согласно первому уравнению (13). Угол λ – непостоянный, и графики функции $\lambda = \lambda(\tau)$ имеют вид, представленный рис. 9. Кривая 1 соответствует $\Gamma = 1$, а кривая 2 – $\Gamma = 10$. При более тщательном исследовании можно увидеть, что на малых временах функция $\lambda(\tau)$ не является монотонно убывающей при $\Gamma = 10$ (рис. 10). Подобный анализ проводился при исследовании движения спутника под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде и был установлен аналогичный эффект [12]. Это позволяет сделать вывод о том, что для спутников Солнца при существенном влиянии момента сил светового давления вращение вектора кинетического момента около оси, перпендикулярной к плоскости орбиты, происходит сначала против хода часовой стрелки до предельного угла за счет имеющейся кинетической энергии, а затем по ходу часовой стрелки.

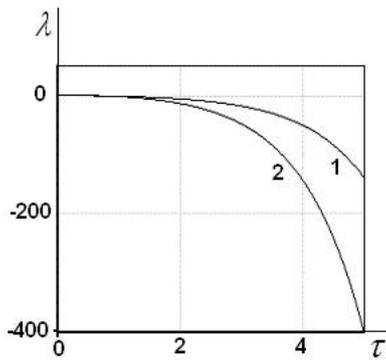


Рис. 9.

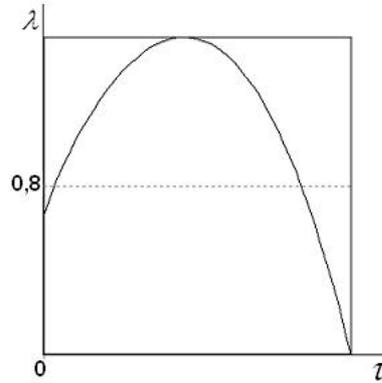


Рис. 10.

4. Вращательное движение динамически симметричного спутника. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2$), моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_3$.

Уравнения движения тела относительно центра масс (1) для динамически симметричного спутника имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, & \frac{d\delta}{dt} &= \frac{L_1}{G}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения их применим метод усреднения. В случае невозмущенного движения Эйлера–Пуансо (при $\varepsilon = 0$), когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, φ, ψ – являются линейными функциями, а угол θ – величина постоянная [15]. Величины G, δ, λ, ν в невозмущенном движении остаются постоянными. Для возмущенного движения углы φ, ψ являются быстрыми переменными, а переменные $G, \delta, \lambda, \nu, \theta$ – медленными. Поэтому проводим усреднение системы уравнений для медленных переменных $G, \delta, \lambda, \theta$ по быстрым переменным: сначала по ψ , а затем по φ . После усреднения по быстрым переменным ψ, φ получим уравнения движения симметричного спутника в безразмерных величинах

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \tilde{G} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2\tilde{A}_1} (\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}) + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} \cos^2 \theta \right], \\
 \frac{d\theta}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \left[-\frac{\tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{22}}{2\tilde{A}_1} + \frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3} \right] \sin \theta \cos \theta, \\
 \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\varepsilon^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{2\tilde{G}(1 - e^2)^2} \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu) (P(e, \nu) + \Gamma) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right), \\
 \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= \varepsilon^2 \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\tilde{G}(1 - e^2)^2} \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu) (P(e, \nu) - \Gamma) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right), \\
 P(e, \nu) &= \frac{3(1 + e \cos \nu)}{(1 - e^2)} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь безразмерные величины определяются так же, как в п. 1, а коэффициент момента сил светового давления Γ – по формуле (11).

Применяем модифицированный метод усреднения [14] и находим

$$\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{\cos \delta (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta)}{2\tilde{G}(1 - e^2)^{1/2}} \left[\frac{3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)}{1 - e^2} - \Gamma \right]. \tag{16}$$

Исследуем решение системы (15) при малом ε на промежутке времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Интегрируя второе уравнение системы (15) для угла нутации, получим

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \tilde{\rho} \tau \right], \quad \tilde{\rho} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 - 2\tilde{\alpha}_3, \quad \tilde{\alpha}_i = \frac{\tilde{I}_{ii}}{\tilde{A}_i}. \tag{17}$$

График функции $\theta = \theta(\tau)$ имеет вид, представленный на рис. 11 при $\theta(0) = \pi/6$. Значения главных центральных моментов инерции тела $\tilde{A}_1 = 4.175$; $\tilde{A}_3 = 1.67$. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $\tilde{I}_{11} = 2.322$; $\tilde{I}_{22} = 1.31$; $\tilde{I}_{33} = 1.425$ и $\tilde{I}_{11} = 2.0$; $\tilde{I}_{22} = 1.0$; $\tilde{I}_{33} = 0.5$. В первом случае величина в квадратных скобках уравнения (17) будет положительной, а во втором случае – отрицательной. Аналогичный закон изменения и график функции угла нутации получен при движении динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде [10].

Учитывая равенство (17), можно получить аналитическое решение для первого уравнения системы (15) в виде явной функции в медленном времени τ

$$\tilde{G} = \cos \theta_0 \exp [-\tilde{\alpha}_3 \tau] \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \exp [-\tilde{\rho} \tau]}.$$

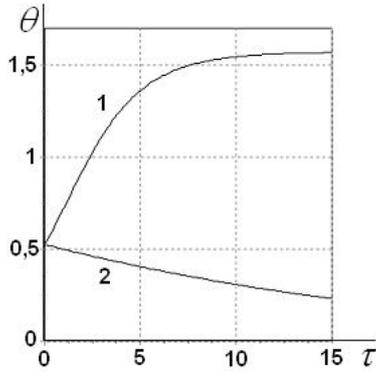


Рис. 11.

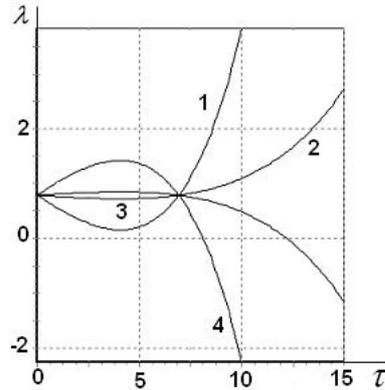


Рис. 12.

С учетом (16), (17) находим закон изменения угла λ от времени τ

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \alpha \frac{(2 - \beta\gamma) \exp(\tilde{\alpha}_3\tau)}{(1 + \beta\gamma)^{3/2} \cos \theta_0},$$

$$\alpha = \frac{\cos \delta}{(1 - e^2)^{1/2}} \left\{ \frac{3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3)}{(1 - e^2)} - \Gamma \right\}, \quad \beta = \text{tg}^2 \theta_0, \gamma = \exp(-\tilde{\rho}\tau).$$

График изменения функции $\lambda = \lambda(\tau)$ представлен на рис. 12 для начального значения угла нутации $\theta(0) = \pi/6$. Кривые 1–4 соответствуют значениям $\alpha = 0.1; 1; -0.1; -1$. Положительные значения отвечают случаю $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_3$ (спутник “сплюснутый” по оси инерции A_3), а отрицательные – $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_3$ (спутник “вытянутый” по оси инерции A_3). Видно, что во всех расчетных случаях графики функций $\lambda = \lambda(\tau)$ имеют точки экстремума, т.е. вектор кинетического момента со временем меняет направление вращения около вертикали к плоскости орбиты. Это объясняется тем, что правая часть уравнения (25) содержит выражение $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$, которое является положительным для значений угла $\theta \in [0; \approx 54.74^\circ]$. В данном расчетном случае угол θ увеличивается и проходит критическое значение 54.74° , поэтому знак выражения меняется. Если принять при расчетах $\theta(0) = \pi/6$, то функция $\lambda = \lambda(\tau)$ будет монотонной на всем временном интервале.

Таким образом, при движении динамически симметричного спутника под действием момента сил гравитационного притяжения и светового давления, а также сопротивления среды вектор кинетического момента \mathbf{G} направлен под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты, при этом величина вектора убывает, стремясь к нулевому значению. Направление движения конца вектора \mathbf{G} по сфере радиуса G зависит от “формы” спутника. В случае спутника “сплюснутого” по оси инерции A_3 угол нутации стремится к

предельному значению $\pi/2$. Для динамически “вытянутого” по этой же оси спутника угол нутации стремится к нулю.

Авторы благодарят Л.Д. Акуленко за внимание к работе, ценные советы и полезные обсуждения.

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 3. – С. 474–483.
3. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
4. *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 5. – С. 923–930.
5. *Поляхова Е.Н.* Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
6. *Сазонов В.В.* Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрон. вестн. – 1994. – **28**, № 2. – С. 95–107.
7. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. – Киев: Наук. думка, 1984. – 188 с.
8. *Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю.* Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 2. – С. 3–14.
9. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 5–13.
10. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде // Механика твердого тела. – 2006. – **36**. – С. 58–63.
11. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.
12. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2007. – **12**, вип. 7. – С. 85–98.
13. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
14. *Акуленко Л.Д.* Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 2. – С. 165–176.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Механика. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.