УДК 517.5

©2009. **Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов**

ОЦЕНКА ДИЛАТАЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ ОТКРЫТЫХ Q-ОТОБРАЖЕНИЙ

В статье рассматриваются так называемые кольцевые Q-отображения, являющиеся естественным обобщением квазирегулярных отображений в смысле геометрического определения по Ю.Вяйсяля, использующего терминологию модулей. Доказано, что внутренняя дилатация указанных выше отображений мажорируется функцией $Q(x)$ с точностью до постоянной, зависящей только от размерности пространства. Результаты имеют широкое применение к уравнениям типа Бельтрами, классам Соболева и другим классам пространственных отображений.

1. Введение. Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leq K\,M(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M – конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определённая на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ – некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. На языке ёмкостей соотношение (1) означает, что отображение f искажает ёмкость любого конденсатора в D не более, чем в K раз.

Пусть теперь в основе определения рассматриваемого класса отображений, вместо соотношения (1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x)\cdot\rho^n(x)\ \ dm(x)\,, \tag{2}$$

где $m(x)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ – произвольная неотрицательная борелевская функция, такая что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ, а $Q : D \to [1,\infty]$ – вещественнозначная функция, см., напр., [4] и [1]. В случае, когда $Q(x) \leq K$ п.в., мы снова приходим к неравенству (1). В общем случае, последнее неравенство означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$, $M(f\Gamma) \leq M_{Q(x)}(\Gamma)$. По-видимому, впервые неравенство вида (2) для гомеоморфизмов $f \in ACL^n$, $f^{-1} \in ACL^n$ было установлено в работе [12].

Более общо, можно предполагать, что контролируемым образом искажаются не все кривые семейства Γ, а только "некоторые." Преимущественно мы рассматриваем в данной работе семейства кривых, которые соединяют концентрические сферы с центром в фиксированной точке заданной области; в дальнейшем речь идёт о классах пространственных отображений, которые, в случае неограниченной функции $Q(x)$, не совпадают с классом квазиконформных отображений.

Всюду D – область в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $m(x)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно, $G \Subset D$ означает, что $\overline{G}$ – компактное подмножество области D. Приведённые выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_\gamma \rho(x) \quad |dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x) \quad dm(x).$$

Пусть $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Следующее понятие мотивировано одним из важнейших определений квазиконформности, см. [2]. Пусть $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, $A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i)$. Говорят, что $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$,* если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\, S_2,\, A\right)\right)\right) \;\leq \int\limits_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\; dm(x) \tag{3}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\; dr \;\geq\; 1\,. \tag{4}$$

Изучение кольцевых Q-отображений не только связано с обширным применением к различным классам отображений, в частности, классам Соболева, но и имеет самостоятельное значение, поскольку соотношениям вида (3) удовлетворяют решения уравнения типа *Бельтрами*, имеющего важные применения в науке и технике, см., напр., [4] и [6]. Если f-гомеоморфизм и $Q(x) \equiv c \in [1, \infty)$, определения кольцевого *Q-гомеоморфизма* и *Q-гомеоморфизма* эквивалентны и дают определение квазиконформных отображений, см., напр., [13]. В случае неограниченных Q это, вообще говоря, не так, даже если f-гомеоморфизм, см. [6]. Заметим, что подклассом кольцевых Q-отображений являются *Q-отображения,* т.е., непрерывные отображения, удовлетворяющие оценке (2).

Следующие важные определения можно найти в [5], см. раздел 3 гл. II. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая и пусть $x \in f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Кривая $\alpha : [a,\, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (i) $\alpha(a) = x$; (ii) $f\circ\alpha = \beta|_{[a,\, c)}$; (iii) если $c < c' \le b$, то не существует кривой $\alpha' : [a,\, c') \to D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a,\, c)}$ и $f\circ\alpha' = \beta|_{[a,\, c')}$. Пусть f – открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Тогда кривая $\beta : [a,\, b) \to \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x, см. следствие 3.3 главы II в [5]. *Конденсатором* в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, называем пару $E = (A,\, C)$, где A – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C – компактное подмножество A. *Ёмкостью* конденсатора E называется величина $\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}\,(A,\, C) = \inf\limits_{u\,\in\, W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n\; dm(x)$, где $W_0(E) = W_0\,(A,\, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x) \ge 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях*, пишем $f \in ACL$, если в любом n-мерном параллелепипеде P с рёбрами параллельными осям координат и таком, что $\overline{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. Известно, что если $f \in ACL$, то f имеет п.в. частные производные в D.

Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f\,'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f\,'(x)$. В дальнейшем $\|f\,'(x)\| = \max\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f\,'(x)h|}{|h|}$, $l\left(f\,'(x)\right) = \min\limits_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f\,'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина $K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}$, если $J(x, f) \ne 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках. *Внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина $K_I(x, f) = \frac{|J(x,f)|}{l(f\,'(x))^n}$, если $J(x, f) \ne 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f\,'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках. *Линейная дилатация* f в точке x есть величина $(x, f) = \sqrt[n]{K_I(x, f)K_O(x, f)}$.

В работах [7], [9] было установлено свойство ACL для Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n, n \ge 2$, при локально интегрируемой Q. Там же показана принадлежность таких Q-гомеоморфизмов соболевскому классу $W^{1,1}_{loc}$, дифференцируемость п.в. и оценка внешней дилатации для Q-гомеоморфизмов

$$K_O(x, f) \quad \le \quad C_n \cdot Q^{\,n-1}(x) \tag{5}$$

для п.в. $x \in D$. Эти результаты были перенесены на кольцевые Q-гомеоморфизмы в работе [10]. Отметим, что указанные выше результаты справедливы также для открытых дискретных кольцевых Q-отображений, допускающие наличие точек ветвления, см. [11]. В данной же работе основной целью является установление новой оценки внутренней дилатации для кольцевых Q-отображений

$$K_I(x, f) \quad \le \quad c_n \cdot Q(x) \tag{6}$$

для п.в. $x \in D$, где константа $_n$ зависит только от размерности n. Отметим, что в силу сделанных выше замечаний, внутренняя и внешняя дилатации для открытых дискретных кольцевых Q-отображений определены корректно. Известно, что для конденсатора $E=(A,C)$

$$\operatorname{cap} E \quad \geq \quad \frac{(\inf m_{n-1}\, S)^{\,n}}{[m(A\setminus C)]^{\,n-1}} \tag{7}$$

где $m_{n-1}\, S$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега C^{∞} – многообразия S, являющегося границей $S=\partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A; в (7) точная нижняя грань берется по всем таким S, см. предложение 5 из [3].

Предложение 1. *Пусть $E=(A,\,C)$ – произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и пусть Γ_E – семейство всех кривых вида $\gamma:\,[a,\,b)\,\rightarrow\,A$ с $\gamma(a)\,\in\,C$ и $|\gamma|\cap(A\setminus F)\,\neq\,\varnothing$ для произвольного компакта $F\,\subset\,A$. Тогда* $\operatorname{cap} E\,=\,M\,(\Gamma_E)$, *см. предложение* 10.2 *главы II в [5]. Отметим, что заключение предложения 1 остаётся справедливым для конденсаторов из $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. замечание* 10.8 *главы II в [5].*

2. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть $f:D\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение, для которого $Q\in L^1_{loc}$. Тогда п.в.*

$$K_I(x,f)\leq c_n\cdot Q(x),$$

где константа $_n$ зависит только от n.

Доказательство. Согласно работе [11], f дифференцируемо п.в. и $J(x,f)\neq 0$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\infty\notin D'=f(D)$. В каждой точке $x\in D$ дифференцируемости отображения f, где $J(x,f)\neq 0$, рассмотрим конденсатор $E_r=(A_r,G_r)$, где $A_r=\{y:|x-y|<2r\}$ и $G_r=\{y:|x-y|\leq r\}$. Т.к. f – открытое и непрерывное отображение, fE_r также является конденсатором в $\mathbb{R}^n$. Пусть Γ_{E_r} и Γ_{fE_r} – семейства кривых в смысле предложения 1 и Γ_r^* – семейство максимальных поднятий Γ_{fE_r} при отображении f с началом в G_r. Покажем, что $\Gamma_r^*\subset\Gamma_{E_r}$.

Предположим противное, т.е., что существует кривая $\beta:[a,\,b)\rightarrow\mathbb{R}^n$ семейства Γ_{fE_r}, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha:[a,\,c)\rightarrow A_r$ лежит в некотором компакте K внутри A_r. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ – компакт в A_r. Заметим, что $c\neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ – компакт в fA_r, что противоречит условию $\beta\in\Gamma_{fE_r}$. Рассмотрим множество

$$G\,=\,\left\{x\in\mathbb{R}^n:x\,=\,\lim_{k\rightarrow\infty}\alpha(t_k)\right\}\,,\qquad t_k\,\in\,[a,\,c)\,,\ \lim_{k\rightarrow\infty}t_k\,=\,c.$$

Отметим, что переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x\in G$, в силу непрерывности f, будем иметь $f\,(\alpha(t_k))\,\rightarrow\,f(x)$ при $k\,\rightarrow\,\infty$, где $t_k\,\in\,[a,\,c)$, $t_k\rightarrow c$ при $k\rightarrow\infty$. Однако, $f\,(\alpha(t_k))\,=\,\beta(t_k)\,\rightarrow\,\beta(c)$ при $k\rightarrow\infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в

A_r. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$, см. 3.6 гл. I в [44],

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) \neq \varnothing$$

в виду монотонности относительно последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным по 9.12 гл. I в [44]. Таким образом, в силу дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha : [a, c) \to A_r$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha : [a, c] \to K \subset A_r$ и $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Снова по следствию 3.3 главы II в [5] можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальности поднятия α. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_{E_r}$. Заметим, что $\Gamma_{fE_r} > f\Gamma_r^*$, и, следовательно, по предложению 1

$$\operatorname{cap} fE_r = M(\Gamma_{fE_r}) \leq M(f\Gamma_r^*) \leq M(f\Gamma_{E_r}) . \tag{8}$$

Поскольку f является кольцевым Q-отображением, из (8) следует, что

$$\operatorname{cap} fE_r \leq \int\limits_{r<|x-y|<2r} Q(y)\,\eta^n(|x-y|)\,dm(y)$$

для любой неотрицательной измеримой функции $\eta : (r, 2r) \to [0, \infty]$, такой что $\int\limits_r^{2r} \eta(t)dt \geq 1$. В частности, рассмотрим однопараметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & t \in (r, 2r), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r, 2r) . \end{cases}$$

Тогда

$$\operatorname{cap} fE_r \leq \frac{2^n \Omega_n}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\,dm(y) . \tag{9}$$

С другой стороны, по неравенству (7)

$$\operatorname{cap} fE_r \geq \frac{(\inf m_{n-1} S)^n}{[m(fA_r \setminus fG_r)]^{n-1}} , \tag{10}$$

где inf идёт по всевозможным C^∞ – многообразиям S, являющихся границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего fG_r и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в fA_r. Комбинируя (9) и (10) получаем, что

$$(\inf m_{n-1} S)^n \leq \frac{2^n \Omega_n [m(fA_r \setminus fG_r)]^{n-1}}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\,dm(y) . \tag{11}$$

При $r \to 0$ множество $f(G_r)$ с точностью до $o(r)$ представляет собой эллипсоид $f'(G_r)$, являющийся образом шара G_r при линейном отображении f'. Если данный эллипсоид имеет полуоси $0 < a_1 r \leq ... \leq a_n r$, то $m(f'G_r) = \Omega_n a_1 \ldots a_n r^n = \Omega_n J(x,f) r^n$. Разместим наш эллипсоид таким образом, чтобы его центр совпал с началом координат, а главные направления с координатными осями $e_1, ..., e_n$. Тогда площадь его поверхности допускает нижнюю оценку:

$$m_{n-1}\left(\partial f'(G_r)\right) \geq 2m_{n-1}\left(\mathrm{Pr}_1\ \left(f'(G_r)\right)\right) =$$

$$= 2\Omega_{n-1}\cdot a_2 ... a_n r^{\,n-1} = 2\Omega_{n-1}\cdot \frac{J(x,f)}{l\left(f'(x)\right)} r^{\,n-1}\,, \tag{12}$$

где Pr_1 обозначает проекцию на гиперплоскость, перпендикулярную вектору e_1. Следовательно, по (11) и (12),

$$\left[2\Omega_{n-1}\cdot \frac{J(x,f)}{l\left(f'(x)\right)} r^{n-1} - o(r^{\,n-1})\right]^n \leq \left[m_{n-1}\partial f'\left(G_r\right) - o\left(r^{n-1}\right)\right]^{\,n} \leq$$

$$\leq \frac{2^{\,n}\Omega_n\left[m\left(fA_r \setminus fG_r\right)\right]^{n-1}}{m(A_r)} \int\limits_{A_r} Q(y)\,dm(y)\,. \tag{13}$$

Разделив неравенство (13) на $r^{\,n(n-1)}$, устремляя r к 0 и применяя теорему Лебега о дифференцируемости неопределённого интеграла, см. [8], будем иметь

$$\left[\frac{J(x,f)}{l\left(f'(x)\right)}\right]^n \leq \left[J(x,f)\right]^{\,n-1} c_n\cdot Q(x)$$

для п.в. $x \in D$. Следовательно, т.к. $J(x,f) \neq 0$ п.в., см., напр., [11],

$$K_I(x,f) \quad = \quad \frac{J(x,f)}{\left(l\left(f'(x)\right)\right)^{\,n}} \leq c_n\cdot Q(x)$$

для п.в. $x \in D$. $\Box$

Следствие 1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение, для которого $Q \in L^1_{loc}$. Тогда п.в.*

$$H(x,f) \quad \leq \quad c_n\cdot Q(x)\,,$$

где константа c_n зависит только от n.

Следствие 2. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение, для которого $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $H(x,f) \in L^1_{loc}(D)$ и $K_I(x,f) \in L^1_{loc}(D)$.*

1. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – **22**. – P.1397-1420.
2. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P.353-393.

3. *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространствееные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – **130**, no.2. – С.185-206.
4. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
5. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. – Berlin: Springer–Verlag, 1993.
6. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – 2005. – **96**. – P.117-150.
7. *Салимов Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2008. – **72**, no.5. – С.141-148.
8. *Saks S.* Theory of the integral. – New York: Dover Publ. Inc., 1937.
9. *Salimov R.* ACL and differentiability of Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2008. – **33**. – P.295-301.
10. *Салимов Р., Севостьянов Е. ACL* и дифференцируемость почти всюду кольцевых гомеоморфизмов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – **16**. – С.171-178.
11. *Salimov R. and Sevost'yanov E.* ACL and differentiability of the open discrete ring mappings // Complex Var., 10pp. (to appear).
12. *Стругов Ю.Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // ДАН СССР. – 1978. – **243**, no.4. – С.859-861.
13. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
14. *Whyburn G.T.* Analytic topology. – Rhode Island: American Mathematical Society, 1942.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`brusin2006@rambler.ru`,
`ruslan623@yandex.ru`

Получено 27.04.09