

Том 23
Донецк, 2011

Основан в 1997г.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

СО Д Е Р Ж А Н И Е

К 80 летию Ивана Ильича Данилюка	3
<i>Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко</i> Колебания трехслойных пластин при проскальзывании слоев и с покрытыми диафрагмой торцами	5
<i>Е.С. Афанасьева, Р.Р. Салимов</i> О взаимосвязи кольцевых и нижних Q -гомоморфизмов на границе	15
<i>Т.А. Беликова, В.Ю. Скобцов</i> Эволюционный поиск эффективных последовательностей фильтров в задаче бинаризации УЗ изображений	23
<i>Т.А. Васяева, С.В. Хмелевой, Д.Е. Иванов</i> Применение генетического программирования для определения высокого риска патологической потери крови при родах	37
<i>И.В. Горохова, Н.А. Роженко</i> Действие вязкого трения на малые поперечные колебания упругого стержня с сосредоточенной массой на конце	48
<i>С.М. Гребенюк, В.З. Юречко</i> Визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндра із пористого матеріалу в умовах в'язкопружного деформування	55
<i>И.С. Грунский, И.И. Максименко</i> Фinitные представления в алгебраических системах	63
<i>Ю.І. Жихарева, М.В. Працьовитий</i> Властивості розподілу випадкової величини, I -символи якої в зображенні знакододатним рядом Люрота, є незалежними	73
<i>А.Л. Зуев, Ю.И. Кучер</i> Сходимость последовательности приближенных решений динамических уравнений упругой балки	86

<i>А.А. Иванова</i> 3-D математическая модель температурного поля непрерывного слитка	100
<i>А.Ю. Иванов</i> Решение проблемы Борсука для некоторых множеств с нерегулярной границей	110
<i>Д.А. Ковтонюк, И.В. Петков, В.И. Рязанов</i> Задача Дирихле для уравнений Бельтрами	120
<i>Ю.С. Коломойцев</i> Об одном достаточном условии для мультипликаторов в пространствах Харди	130
<i>А.Л. Красников</i> Решение задачи стабилизации билинейной системы	136
<i>М.В. Краснощок</i> Класична розв'язність задачі дифузії у пружному тілі з вільною межею	145
<i>А.В. Мазнев</i> Об одном классе трех нелинейных инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом	155
<i>П.А. Машаров</i> Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар	163
<i>О.А. Очаковская</i> Плотности упаковок на гиперболической плоскости	172
<i>М.В. Працьовитий, А.В. Калашніков</i> Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні	180
<i>В.В. Скобелев</i> Свойства делителей нуля в ассоциативных кольцах	192
<i>Е.А. Татаринев</i> Сложность восстановления графов, являющихся квазикольцами и квазидеревьями	202
<i>Н.В. Фещенко</i> Аналоги проблемы Зальцмана в n -мерном пространстве и их применение	213

К 80 ЛЕТИЮ ИВАНА ИЛЬИЧА ДАНИЛЮКА



3 декабря 2011 года исполнилось 80 лет со дня рождения академика АН УССР, заслуженного деятеля науки Украинской ССР, первого директора ИПММ НАН Украины И.И. Данилюка.

Первые научные работы И.И. Данилюком выполнены в студенческие годы в Львовском университете под руководством Л.И. Волковыского. Значительное влияние на него в эти же годы оказало общение с Я.Б. Лопатинским. В дальнейшем его научные интересы формировались в школе теории обобщенных аналитических функций, возглавляемой И.Н. Векуа, который был его научным руководителем в аспирантуре при Математическом институте им. В.А. Стеклова в Москве. В 1958 г. И.И. Данилюк защитил кандидатскую диссертацию «Некоторые свойства решений эллиптических систем первого порядка и краевые задачи» и был направлен на работу в теоретический отдел Института гидродинамики Сибирского научного центра в Новосибирске.

В 1963 г. он защитил докторскую диссертацию «Исследование по теории краевых задач для эллиптических уравнений (плоский и осесимметрический случаи)».

Близкое общение с выдающимися учеными-организаторами академиками М.А. Лаврентьевым и И.Н. Векуа обогатило его опытом, который в полной мере был им использован, когда в 1964 г. по приглашению Президиума Академии наук Украины И.И. Данилюк участвовал в создании Донецкого научного центра. Он возвращается в Украину и с этого времени его жизнь, научная и общественная деятельность связаны с Донбассом. Иван Ильич был организатором создания Института прикладной математики и механики НАН Украины и его первым директором (1965-1974).

В области дифференциальных уравнений в частных производных исследования И.И. Данилюка посвящены топологическим свойствам решений в зависимости от свойств коэффициентов рассматриваемой системы, доказательству существования внутренних по Стоилову отображений соответствующих эллиптических систем уравнений первого порядка, разработке теории эллиптических уравнений на римановых поверхностях. Им было построено ядро Коши в классе аналитических функций на конечной римановой поверхности, получено представление обобщенных аналитических функций через голоморфные, выведена обобщенная формула Коши.

Важные результаты получены И.И. Данилюком при исследовании краевой задачи с наклонной производной для эллиптической системы первого порядка на плоскости. Сформулированная им теорема эквивалентности редуцирует в классе эллипти-

ческих систем указанную задачу к другой, граничное условие которой не содержит производных от искомым функций. Ему удалось довести качественное исследование задачи Пуанкаре до известной полноты, исследовать спектр задачи, а также рассмотреть аналогичные краевые задачи для нелинейных систем на плоскости. Разработанный им подход получил дальнейшее развитие в работах других советских математиков в применении к уравнениям и граничным операторам высшего порядка.

Большой цикл работ И.И. Данилюк посвятил теории граничных задач линейного сопряжения в классе аналитических функций при достаточно широких предположениях на исходные данные. Класс рассматриваемых граничных контуров – так называемые линии ограниченного вращения (кривые Радоны), а главные коэффициенты граничных условий – ограниченные функции с некоторыми дополнительными ограничениями на характер и величину локальных колебаний их аргументов. Исследована также задача со многими неизвестными функциями и построена теория сингулярных интегральных уравнений с той же степенью общности. Итогом этих исследований явилась монография «Нерегулярные граничные задачи на плоскости».

В Институте гидродинамики НАН Украины И.И. Данилюк исследовал проблемы теоретической гидродинамики: для осесимметричных векторных потоков получил новое представление их через аналитические функции, построил обобщенную формулу и обобщенный интеграл Коши, предложил формулу индекса задачи и формулы, связывающие топологические характеристики потоков с индексом краевого условия.

И.И. Данилюк разработал теоретико-функциональный метод и метод интегральных функционалов с переменной областью интегрирования, позволяющие изучать вопросы существования, ветвления, единственности решений задач при достаточно общих предположениях на исходные данные в нелинейных задачах со свободными границами. В монографии «Об интегральных функционалах с переменной областью интегрирования» (английский перевод появился в США в 1976 г.) изложены вопросы численного решения задач, дано описание топологических свойств множества всех решений. Чрезвычайно плодотворными оказались эти методы в применении к классической задаче Стефана. Была создана модель квазистационарной задачи Стефана, предложен метод ее численного решения на основе метода интегральных функционалов, доказана разрешимость нелинейной системы Ритца, сформулирована новая задача об оптимальном управлении свободной поверхностью, которая играет важную роль в технологических процессах.

В последние годы И.И. Данилюк плодотворно работал над созданием математических моделей механики сплошных сред. Появились его работы по теории квазилинейных параболических уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами и работы, в которых проводится качественный анализ линейных и нелинейных краевых задач для эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами в областях с нерегулярной границей в двухмерных и многомерном случаях.

Научное наследие И.И. Данилюка – 145 работ, из них – две монографии.

УДК 539.3:534.1

©2011. Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ СЛОЕВ И С ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ ТОРЦАМИ

В трехмерной постановке рассмотрена задача об установившихся колебаниях трехслойных изотропных пластин с покрытыми диафрагмой плоскими гранями. На границе раздела слоев выполняются условия скользящего контакта. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Проведены асимптотический анализ и численные исследования дисперсионного уравнения. Представлены диаграммы спектральных кривых, графики изменения фазовых и групповых скоростей.

Ключевые слова: *трехслойная пластина, скользящий контакт, установившиеся колебания, метод однородных решений, дисперсионные спектры, фазовые и групповые скорости.*

1. Введение. История развития теорий поперечно-неоднородных упругих пластин, подходов и методов решения конкретных задач отражена в обзорных статьях [1-4] и монографиях, например, [5, 6]. Данные и другие современные публикации свидетельствуют о том, что большинство научных результатов получено с использованием приближенных теорий. Поэтому актуальным для науки и практических приложений является изучение напряженного состояния и волновых полей в слоистых пластинах на основе уравнений трехмерной теории упругости.

Важную роль в решении трехмерных задач статики и динамики неоднородных пластин сыграли однородные решения [7-12], предложенные в работе [13]. В работе [10] впервые полуобратным методом [14] получена полная система однородных решений уравнений равновесия в перемещениях для трехслойной плиты симметричного строения. Исследованию свойств однородных решений неоднородных плит посвящены работы [5, 11].

Колебания трехслойной пластины в случае идеального контакта слоев для различных граничных условий на торцах исследовались с использованием однородных решений в работах [7-9]. Однако в горной механике существует понятие поверхностей ослабленного механического контакта [15]. В частности, на границе слоев может иметь место условие полного проскальзывания при неразрывности нормальных компонент смещений и напряжений [16, 17]. Такой контакт уже нельзя считать идеальной состыковкой сред. Для кососимметричных колебаний трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев получены однородные решения в работе [12].

В настоящей работе на основе метода однородных решений в трехмерной постановке рассмотрена задача о гармонических изгибных колебаниях трехслойной пластины, плоские грани которой покрыты диафрагмой, с учетом скользящего контакта слоев.

2. Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную пластину толщиной $2h$ сим-

метричного строения относительно срединной плоскости. Внешние одинаковые и внутренний слой пластины находятся в условиях скользящего контакта и являются изотропными. Плоские грани пластины покрыты диафрагмой, а кососимметричные колебания вызваны внешними гармонически изменяющимися во времени усилиями, приложенными к боковой поверхности. Отнесем пластину к безразмерным прямоугольным координатам x_1, x_2, x_3 , причем срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью Ox_1x_2 . Величины, относящиеся к внешним слоям, имеют индекс (1), к внутреннему – индекс (2). Обозначим через h_1 толщину внешних одинаковых слоев, $2h_2$ – толщину внутреннего слоя, а физико-механические характеристики материалов слоев – через $\tilde{G}_m, \rho_m, \nu_m$ ($m = 1, 2$), где \tilde{G}_m – модуль сдвига, ρ_m – плотность материала, а ν_m – коэффициент Пуассона, m – номер слоя. Введем безразмерные величины и координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/R, & x_2 &= \tilde{x}_2/R, & x_3 &= \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), & \lambda &= h/R, & h &= h_1 + h_2, \\ \lambda_1 &= h_1/h, & \lambda_2 &= h_2/h, & u_{i(m)} &= \tilde{u}_{i(m)}/R, & \sigma_{ij(m)} &= \tilde{\sigma}_{ij(m)}/(2\tilde{G}_2), \\ G_m &= \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, & G_1 &= G & (i, j &= \overline{1, 3}, m = 1, 2). \end{aligned}$$

Построение однородных решений рассматриваемой задачи сводится к интегрированию известных систем уравнений движения для каждого слоя

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{j(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{j(m)} + \nu_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2) u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом краевых условий

$$\begin{aligned} u_{j(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, & \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0, \\ u_{3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), & \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{j3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= 0, & \sigma_{j3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначения здесь и ниже соответствуют принятым в работах [7-9].

3. Однородные решения задачи. Значения векторов перемещений представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)B}(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3).$$

Вихревое решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_{1(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2), \\ u_{2(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= - \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), & u_{3(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 p_{(1)k}(x_3) &= \cos l_{(1)k}(x_3 - \lambda_2), \quad p_{(2)k}(x_3) = 0, \quad \text{когда} \quad \cos l_{(1)k}\lambda_1 = 0, \\
 p_{(1)k}(x_3) &= 0, \quad p_{(2)k}(x_3) = l_{(2)k}^{-1} \sin l_{(2)k}x_3, \quad \text{когда} \quad \cos l_{(2)k}\lambda_2 = 0; \\
 l_{(m)k}^2 &= \Omega_m^2 + \delta_k^2, \quad D^2 B_k(x_1, x_2) = (\delta_k/\lambda)^2 B_k(x_1, x_2).
 \end{aligned}$$

Потенциальное решение введем с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 u_{j(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \\
 u_{3(m)\Pi}(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}(x_3) C(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Из выражений (1)-(3) следует

$$D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma/\lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а для неизвестных функций $n_{(m)}(x_3)$, $q_{(m)}(x_3)$ и параметра разделения переменных γ получаем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}
 n_{(m)}'' + [\Omega_m^2 + \gamma^2(1 + \nu_{0(m)})] n_{(m)} + \lambda \nu_{0(m)} q_{(m)}' &= 0, \\
 q_{(m)}'' + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + \nu_{0(m)}} q_{(m)} + \frac{\gamma^2 \nu_{0(m)}}{\lambda(1 + \nu_{0(m)})} n_{(m)}' &= 0;
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 n_{(1)}(1) &= 0, \quad q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(1)}'(\lambda_2) = 0, \\
 q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(2)}'(\lambda_2) &= 0, \quad q_{(1)}(\lambda_2) = q_{(2)}(\lambda_2), \\
 \gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(1) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(1) &= 0, \\
 G [\gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(\lambda_2) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(\lambda_2)] &= \\
 = \gamma^2 \lambda^{-1} (\nu_{0(2)} - 1) n_{(2)}(\lambda_2) + (\nu_{0(2)} + 1) q_{(2)}'(\lambda_2).
 \end{aligned}$$

Общим решением системы (4) являются функции

$$\begin{aligned}
 n_{(1)}(x_3) &= H_1 \cos \gamma_{1(1)}(x_3 - \lambda_2) + H_2 \sin \gamma_{1(1)}(x_3 - \lambda_2) + \\
 &+ H_3 \cos \gamma_{2(1)}(x_3 - \lambda_2) + H_4 \sin \gamma_{2(1)}(x_3 - \lambda_2), \\
 q_{(1)}(x_3) &= Q_1 \sin \gamma_{1(1)}(x_3 - \lambda_2) + Q_2 \cos \gamma_{1(1)}(x_3 - \lambda_2) + \\
 &+ Q_3 \sin \gamma_{2(1)}(x_3 - \lambda_2) + Q_4 \cos \gamma_{2(1)}(x_3 - \lambda_2), \\
 n_{(2)}(x_3) &= H_5 \sin \gamma_{1(2)}x_3 + H_6 \sin \gamma_{2(2)}x_3, \\
 q_{(2)}(x_3) &= Q_5 \cos \gamma_{1(2)}x_3 + Q_6 \cos \gamma_{2(2)}x_3.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \gamma_{1(m)}^2 &= k_m^2 \Omega_m^2 + \gamma^2, \quad \gamma_{2(m)}^2 = \Omega_m^2 + \gamma^2, \quad k_m^2 = (1 - 2\nu_m)/(2 - 2\nu_m); \\
 Q_i &= \lambda^{-1} a_i H_i \quad (i = \overline{1, 6}), \quad a_1 = -\gamma_{1(1)}, \quad a_2 = \gamma_{1(1)}, \\
 a_3 &= -\gamma^2/\gamma_{2(1)}, \quad a_4 = \gamma^2/\gamma_{2(1)}, \quad a_5 = \gamma_{1(2)}, \quad a_6 = \gamma^2/\gamma_{2(2)}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты H_i имеют вид

$$\begin{aligned} H_1 &= \gamma_{1(2)} \Omega_2^2 \left(\gamma^2 + \gamma_{2(1)}^2 \right) \sin \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_2 &= -\gamma_{1(2)} \Omega_2^2 \left(\gamma^2 + \gamma_{2(1)}^2 \right) \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_3 &= -2\gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} \gamma_{1(2)} \Omega_2^2 \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \sin \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_4 &= 2\gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} \gamma_{1(2)} \Omega_2^2 \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_5 &= -\gamma_{1(1)} \Omega_1^2 \left(\gamma^2 + \gamma_{2(2)}^2 \right) \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2, \\ H_6 &= 2\gamma_{1(1)} \gamma_{1(2)} \gamma_{2(2)} \Omega_1^2 \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2, \end{aligned}$$

а для нахождения собственных значений γ получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} F(\gamma, \Omega) &\equiv \frac{\eta}{G} \gamma_{1(1)} C_{11} C_{21} (\xi_2 S_{12} C_{22} - \tau_2 C_{12} S_{22}) + \\ &+ G (\xi_1 S_{11} C_{21} - \tau_1 C_{11} S_{21}) \gamma_{1(2)} C_{12} C_{22} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \rho_1 / \rho_2, \quad \xi_m = \left(\gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2 \right)^2, \quad \tau_m = 4\gamma^2 \gamma_{1(m)} \gamma_{2(m)}, \\ S_{jm} &= \sin \gamma_{j(m)} \lambda_m, \quad C_{jm} = \cos \gamma_{j(m)} \lambda_m \quad (j, m = 1, 2). \end{aligned}$$

Важной характеристикой колебаний являются частоты запираания [18]. Для их определения полагаем в (5) $\gamma = 0$ и получаем трансцендентное уравнение

$$F(0, \Omega) \equiv (G k_2 \Omega_1 s_{11} c_{12} + k_1 \Omega_2 c_{11} s_{12}) c_{21} c_{22} = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} s_{1m} &= \sin(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad s_{2m} = \sin(\Omega_m \lambda_m), \\ c_{1m} &= \cos(k_m \Omega_m \lambda_m), \quad c_{2m} = \cos(\Omega_m \lambda_m). \end{aligned}$$

Уравнение (6) определяет три независимые серии частот запираания. Причем частоты второй и третьей серий находятся в явном виде и не зависят от значений коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 в отличие от частот первого семейства.

4. Асимптотический анализ уравнений и предельные соотношения. Для определения корней дисперсионного уравнения (5) важным является поиск точек их пересечения с плоскостью $\Omega = 0$. Предельный переход к задаче статики осуществляется с помощью разложения функции $F(\gamma, \Omega)$, порождающей дисперсионное уравнение, в ряд Тейлора в окрестности точки $\Omega = 0$. Если $\Omega \rightarrow 0$, тогда уравнение (5) преобразуется к виду

$$F(\gamma, 0) \equiv (1 - \nu_1) \cos^2 \gamma \lambda_1 (\sin 2\gamma \lambda_2 - 2\gamma \lambda_2) + G (1 - \nu_2) (\sin 2\gamma \lambda_1 - 2\gamma \lambda_1) \cos^2 \gamma \lambda_2 = 0,$$

а в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ – к уравнению

$$F(\gamma, 0) \equiv (\sin \gamma - \gamma) \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 0,$$

корни которого не зависят от параметров ν_1 , ν_2 , G . Серия действительных корней последнего уравнения состоит из двукратных.

Для данного вида колебаний в особом положении оказывается первая мнимая ветвь дисперсионного спектра уравнения (5), проходящая через начало координат $\gamma = 0$, $\Omega = 0$. Соответствующая дисперсная мода оказывается распространяющейся при любой частоте Ω . Для анализа скоростей этой моды при малых частотах в окрестности начала координат можно существенно упростить дисперсионное уравнение (5) за счет малости величин $v = \text{Im}\gamma$ и Ω . При этом для безразмерной фазовой скорости $v_p = c_p/c_{S2} = \Omega_2/v$ имеем

$$v_p = 2v \sqrt{\frac{G\lambda_1^3(1-k_1^2) + \lambda_2^3(1-k_2^2)}{3(\eta\lambda_1 + \lambda_2)}}.$$

Из последнего выражения и соотношения [18]

$$v_g = v_p + v \frac{dv_p}{dv}$$

следует, что значение безразмерной групповой скорости v_g для данного случая определяется равенством

$$v_g = 2v_p.$$

При $\gamma = 0$ находим

$$v_p(0) = v_g(0) = 0.$$

Таким образом, в низкочастотном диапазоне кососимметричная волна обладает дисперсией, и ее групповая скорость вдвое превосходит фазовую.

При $\gamma \rightarrow \infty$ из (5) для первой бегущей моды получаем уравнение

$$r_1 \frac{\eta}{G} \left((1 + s_2^2)^2 - 4r_2 s_2 \right) + G r_2 \left((1 + s_1^2)^2 - 4r_1 s_1 \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$r_m = \sqrt{1 - c^2/c_{Pm}^2}, \quad s_m = \sqrt{1 - c^2/c_{Sm}^2},$$

c_{Pm} , c_{Sm} – соответственно скорости продольных и поперечных волн в m -м слое.

Уравнение (7) совпадает с известным [19] для нахождения скорости c_{St} волны Стоунли вблизи поверхности раздела двух упругих полупространств с условиями проскальзывания по поверхности контакта. Поэтому для коротких волн границы пластины не влияют на характер волнового процесса и вид граничных условий на торцах не имеет значения.

В результате фазовая скорость первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом высокочастотном пределе значение скорости поверхностной волны Стоунли. Для остальных ветвей при $\gamma \rightarrow \infty$ получаем

$$c = \min \{c_{S1}, c_{S2}\}.$$

Рассмотрим случай соотношений параметров упругости в слоях: $G = 1$, $\eta = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Тогда дисперсионное уравнение (5) имеет вид

$$C_1 C_2 \left((\gamma^2 + \gamma_2^2)^2 S_1 C_2 - 4\gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 C_1 S_2 \right) = 0, \quad (8)$$

где

$$\gamma_1^2 = \gamma^2 + k^2 \Omega^2, \quad \gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2, \quad k^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}, \quad S_j = \sin \frac{1}{2} \gamma_j, \quad C_j = \cos \frac{1}{2} \gamma_j.$$

Из уравнения (8) получается предельное соотношение, описывающее асимптотическое значение фазовой скорости первой моды на высоких частотах, к которому должны стремиться численные решения этого уравнения. Уравнение (8) сводится к уравнению для скорости волны Рэлея

$$(2 - v_p^2)^2 - 4\sqrt{1 - k^2 v_p^2} \sqrt{1 - v_p^2} = 0.$$

Таким образом, безразмерная фазовая скорость первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом пределе значение безразмерной скорости волны Рэлея $v_R = c_R/c_S$ и величина v_p остается меньше v_R .

Спектр частот запираания мод уравнения (8) получается таким

$$\Omega^* = \{p\pi/k; (2p - 1)\pi\}_{p=1}^{\infty}.$$

Здесь вторая серия частот запираания является двухкратной.

Если $G \rightarrow 0$ (внешний слой – мягкий), тогда из уравнения (5) следует

$$\cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1 (\sin 2\gamma \lambda_2 - 2\gamma \lambda_2) = 0,$$

и дисперсионный спектр состоит из двух частей. Одна соответствует колебаниям внешних слоев, а другая – равновесию внутреннего слоя.

При $G \rightarrow \infty$ (внутренний слой – мягкий) из уравнения (5) имеем

$$(\sin 2\gamma \lambda_1 - 2\gamma \lambda_1) \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2 = 0.$$

Когда одно из $\lambda_{3-m} = 0$, дисперсионное уравнение (5) преобразуется к виду

$$\left(\gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2 \right)^2 \sin \gamma_{1(m)} \cos \gamma_{2(m)} - 4\gamma^2 \gamma_{1(m)} \gamma_{2(m)} \cos \gamma_{1(m)} \sin \gamma_{2(m)} = 0.$$

5. Анализ результатов численных исследований. Пусть внешние слои пластины изготовлены из алюминия и характеризуются параметрами среды $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_1 = 0,35$, $c_{S1} = 3110$ м/с, а внутренний – из вольфрама: $\rho_2 = 18,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\nu_2 = 0,29$, $c_{S2} = 2860$ м/с. Расчеты производились для варианта $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. При этом входящие в уравнение (5) частоты Ω_1 , Ω_2 , Ω связаны соотношениями

$$\Omega_1 = \Omega c_{S2}/c_{S1}, \quad \Omega_2 = \Omega.$$

Дисперсионное уравнение (5) определяет счетное множество спектральных кривых – зависимостей безразмерной частоты Ω от параметра γ .

На рис. 1 представлен полный дисперсионный спектр кососимметричных колебаний пластины. На диаграмме сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ($\text{Re}\gamma, \Omega$) и мнимую ($\text{Im}\gamma, \Omega$) плоскости. Дисперсионное уравнение (5) при фиксированной частоте имеет конечное число мнимых корней, счетное множество действительных и комплексных корней.

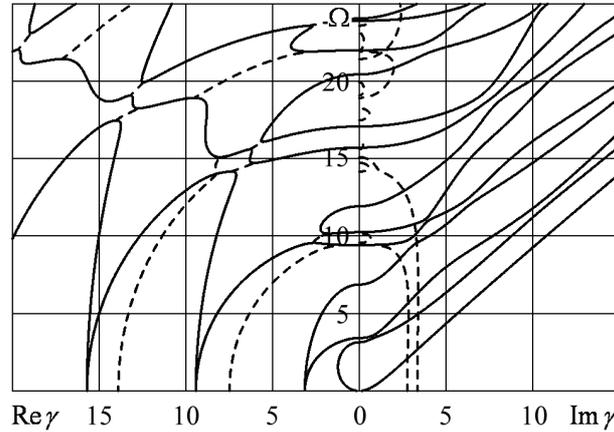


Рис. 1. Полный дисперсионный спектр изгибных мод в трехслойной пластине

На рис. 2 показаны зависимости безразмерных фазовых $v_p = c_p/c_{S2}$ (рис. 2, а) и групповых $v_g = c_g/c_{S2}$ (рис. 2, б) скоростей первых трех распространяющихся мод. Сплошные кривые соответствуют диафрагме, штриховые – свободным от на-

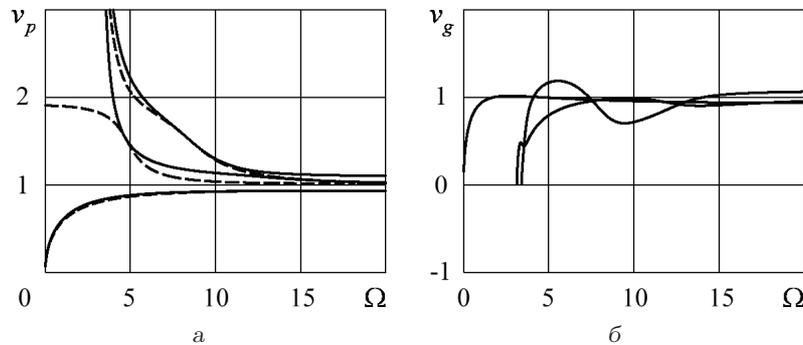


Рис. 2. Зависимость безразмерных фазовых и групповых скоростей изгибных мод от безразмерной частоты Ω

пряжений плоским граням [12]. Вблизи частот запирания фазовая скорость $c_p \rightarrow \infty$, а групповая $c_g = 0$. В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными, и значения групповой скорости мало отличаются от значений фазовой. Фазовая скорость первой моды для обоих

видов граничных условий отличается незначительно. Однако вид граничных условий на лицевых плоскостях оказывает значительное влияние на характер изменения фазовой скорости второй моды в диапазоне средних частот (рис. 2, *a*). На графиках имеются точки касания кривых. Это свидетельствует о равенстве фазовых и, как следствие, групповых скоростей мод для различных граничных условий на лицевых плоскостях пластины.

На основании уравнения (6) в таблице приведены первые пятнадцать частот запираания. Столбец с номером 1 соответствует граничным условиям типа диафрагмы, столбец 2 – свободным от напряжений плоских граней [12]. Значения частот запираания уравнения (6) для слоев из одинаковых материалов ($\nu = 0, 29$) представлены в столбце 3, которые свидетельствуют о том, что в такой пластине из-за неидеального контакта слоев невозможен переход к однородной.

Частоты запираания

Номер частоты	Значения частот запираания		
	1	2	3
1	3,1415927	3,1415927	3,1415927
2	3,4147847	6,8295695	3,1415927
3	6,8637900	6,8637900	5,7765615
4	9,4247780	9,4247780	9,4247780
5	10,244354	11,916072	9,4247780
6	11,916072	13,659139	11,553123
7	15,707963	15,707963	15,707963
8	17,073924	20,433021	15,707963
9	20,433021	20,488708	17,329684
10	21,991149	21,991149	21,991149
11	23,903493	24,040633	21,991149
12	24,040633	27,318278	23,106246
13	28,274334	28,274334	28,274334
14	30,733063	33,419397	28,274334
15	33,419397	34,147847	28,882807

Анализ дисперсионных кривых, частот запираания, графиков изменения фазовых и групповых скоростей показывает, что по сравнению с аналогичными задачами для трехслойной пластины с идеальным контактом слоев [7-9] и скользящим контактом [12] происходят количественные и качественные изменения характеристик волнового процесса. В частности, в трехслойной пластине в области низких частот для кососимметричного случая появляются одновременно счетное множество действительных и одна мнимая моды, изменяются значения и количество частот запираания на интервале $0 \leq \Omega \leq 25$. Первая мнимая мода оказывается распространяющейся при любой частоте и в низкочастотном пределе обладает дисперсией. Для остальных ветвей групповая скорость на частотах запираания равна нулю, а фазовая стремится к бесконечности. Следует отметить, что возможно появление двукратных корней при $\Omega = 0$. Комплексные и действительные участки дисперсионных ветвей, начинающихся при $\text{Re}\gamma > 0$, пересекают плоскость $\Omega = 0$ и ось $\gamma = 0$ под прямым углом.

Уравнение (7) имеет вещественный корень, что указывает на существование по-

верхностной волны Стоунли вблизи плоскостей контакта слоев. Значение ее скорости v_{St} , отнесенной к c_{S2} , равно 0,936. В случае изгибных колебаний величина фазовой скорости v_p для первой моды в коротковолновом пределе остается меньше асимптотического значения v_{St} (рис. 2). Остальные кривые приближаются к асимптоте $v_p = 1$ сверху. Таким образом, в высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными.

6. Заключение. Таким образом, в данной работе предложен аналитический метод решения трехмерной задачи об упругих колебаниях трехслойных симметричного строения пластин при скользящем контакте слоев и с торцами, покрытыми диафрагмой. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях в виде суммы вихревого и потенциального состояний.

Собственные функции вихревого и потенциального решений находятся в явном виде. Для определения собственных значений получено дисперсионное уравнение в форме, приспособленной для численных исследований.

На основе численно-аналитических исследований дисперсионного уравнения изучены некоторые закономерности в распространении упругих волн в трехслойной пластине в зависимости от изменения физико-механических свойств материалов слоев, их относительных толщин и частот колебаний, вида однородных граничных условий на плоских гранях.

1. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56.
2. Шульга Н.А. Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // Прикл. механика. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 15-56.
3. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review // Mechanics of composite materials. – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243-252.
4. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // Applied mechanics reviews. – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287-308.
5. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов на Дону: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
6. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
7. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Изгибные колебания упругих трехслойных пластин симметричного строения со свободными плоскими гранями // Вісн. Донецьк. нац. ун-у. Сер. А. Природничі науки. – 2009. – № 1. – С. 117-124.
8. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146-153.
9. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 3-10.
10. Ворович И.И., Кадомцев И.Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // Прикл. математика и механика. – 1970. – Т. 34, № 5. – С. 870-876.
11. Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755-758.
12. Фоменко М.В. Кососимметричные колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 188-195.
13. Лурье А.И. К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, № 2-3. – С. 151-168.

14. Ворович И.И., Малкина О.С. Напряженное состояние толстой плиты // Прикл. математика и механика. – 1967. – Т. 31, № 2. – С. 230-241.
15. Краужлис П.В., Краужлис Л.А. Об одном типе волн в средах, содержащих поверхности ослабленного механического контакта // Математические вопросы теории распространения волн. – 1988. – Вып. 18. – С. 113-122.
16. Заславский Ю.М., Митякова О.И. Дисперсия поверхностных волн в структуре: упругий слой и полупространство в скользящем контакте // Акустический журнал. – 1992. – Т. 38, вып. 2. – С. 296-303.
17. Марчук А.В. Трехмерное аналитическое решение для слоистых плит с учетом проскальзывания слоев // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33, № 9. – С. 10-14.
18. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
19. Meleshko V.V. Energy analysis of Stoneley surface waves // International Applied Mechanics. – 1980. – Vol. 16, No 5. – P. 382-385.

E. V. Altukhov, M. V. Fomenko

Vibrations of three-layered plates under layers slip and with ends covered by a diaphragm.

In three-dimensional statement the problem about the steady-state vibrations of three-layered isotropic plates with flat faces covered by a diaphragm is considered. Conditions of sliding contact are satisfied on interface of layers. The homogeneous solutions of equations system of motion in the displacements are got. The asymptotic analysis and computational investigations of dispersive equation are carried out. Diagrams of spectral curves, change curves of phase and group velocities are represented.

Keywords: *three-layered plate, sliding contact, steady-state vibrations, method of homogeneous solutions, dispersion spectra, phase and group velocities.*

Є. В. Алтухов, М. В. Фоменко

Коливання тришарових пластин при проковзуванні шарів та з покритими діафрагмою торцями.

У тривимірній постановці розглянуто задачу про усталені коливання тришарових ізотропних пластин з покритими діафрагмою плоскими гранями. На межі поділу шарів виконуються умови ковзного контакту. Отримано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Проведено асимптотичний аналіз і чисельні дослідження дисперсійного рівняння. Наведено діаграми спектральних кривих, графіки зміни фазових і групових швидкостей.

Ключові слова: *тришарова пластина, ковзний контакт, усталені коливання, метод однорідних розв'язків, дисперсійні спектри, фазові та групові швидкості.*

Донецкий национальный ун-т
altukhov@matfak.dondu.donetsk.ua

Получено 16.09.11

УДК 517.5

©2011. Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов

О ВЗАИМОСВЯЗИ КОЛЬЦЕВЫХ И НИЖНИХ Q -ГОМЕОМОРФИЗМОВ НА ГРАНИЦЕ

В данной работе рассмотрены нижние и кольцевые Q -гомеоморфизмы на гладких римановых многообразиях и установлена их взаимосвязь на границе.

Ключевые слова: нижние и кольцевые Q -гомеоморфизмы, гладкие римановы многообразия.

1. Введение. В настоящее время математические науки тесно контактируют с многообразиями. В алгебре – это группы Ли, в экономике – поверхности безразличия, в механике – фазовые пространства и уровни энергии, в теории относительности – пространство-время. В современной математике различают топологические и гладкие многообразия. Это связано с теми или иными возможностями согласования систем координат, заданных на отдельных участках многообразия. Участки многообразия могут пересекаться, и пересечения получают таким образом различные системы координат, при этом каждая система координат может быть связана через другую непрерывным или гладким (дифференцируемым) преобразованием, [4]. В первом случае многообразие называют топологическим, во втором – гладким. В нашей работе рассматриваются лишь гладкие римановы многообразия.

Параллельно теории многообразий длительное время развивалась теория отображений в рамках конформных и квазиконформных отображений. Бельтрами, Каратеодори, Кристоффель, Гаусс, Риман и другие внесли свой вклад в развитие этой теории. В последнее время активно развивалась теория так называемых Q -гомеоморфизмов. В препринте [2], а затем в статье [3] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии и легло в основу определения Q -гомеоморфизмов. Основной целью теории Q -гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения f и свойств мажоранты $Q(x)$ в модульном неравенстве. Высокий уровень абстракции теории Q -отображений позволяет применять эту теорию ко всем современным классам отображений, где удастся установить оценку модуля с подходящей функцией $Q(x)$, связанной с теми или иными характеристиками (дилатациями) отображений, в том числе, к отображениям с конечным искажением по Иванцу и отображениям с конечным искажением длины, см., напр., [8] и [12].

В последние годы активно изучаются кольцевые Q -гомеоморфизмы, мотивированные кольцевым определением квазиконформности по Герингу в [6], которые были впервые введены на плоскости в связи с изучением уравнений Бельтрами, см., напр., [17], а затем и в пространстве, см. [16]. Впоследствии понятие кольцевого гомеоморфизма было распространено в граничные точки областей на плоскости в работах [18] и [19]. Весьма полезным инструментом в исследованиях отображений с

конечным искажением по Иванцу оказались также нижние Q -гомеоморфизмы, введенные в работе [10]. Отметим, что кольцевые и нижние Q -гомеоморфизмы сами являются отображениями с конечным искажением в смысле геометрического определения.

Напомним некоторые определения, относящиеся к теории многообразий, которые можно найти, напр., в [9], [11], [13] и [15]. n -мерное топологическое многообразие \mathbb{M}^n – это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность гомеоморфную \mathbb{R}^n . *Картой на многообразии* \mathbb{M}^n называется пара (U, φ) , где U – открытое подмножество пространства \mathbb{M}^n , а φ – гомеоморфное отображение подмножества U на открытое подмножество координатного пространства \mathbb{R}^n , с помощью которого каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат*. *Гладкое многообразие* – многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны гладким (C^∞) образом.

Римановым многообразием (\mathbb{M}^n, g) называется гладкое многообразие вместе с заданной на нем римановой метрикой, т.е. положительно определенным симметричным тензорным полем $g = g_{ij}(x)$, которое задается в координатных картах с правилом перехода:

$$'g_{ij}(x) = g_{kl}(y(x)) \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j}. \quad (1)$$

Тензорное поле $g_{ij}(x)$ в дальнейшем также подразумевается гладким.

Элемент длины на (\mathbb{M}^n, g) задается инвариантной дифференциальной формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j := \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j,$$

где g_{ij} – метрический тензор, x^i – локальные координаты. *Геодезическое расстояние* $d(p_1, p_2)$ определяется как инфимум длин кривых, соединяющих точки p_1 и p_2 в (\mathbb{M}^n, g) , см. [11], с. 94. Напомним также, что *элемент объема* на (\mathbb{M}^n, g) определяется инвариантной формой

$$dv = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \dots dx^n,$$

см., напр., § 88 в [15]. Заметим, что $\det g_{ij} > 0$ в силу положительной определенности g_{ij} , см. напр., [5], с. 277.

Заметим также, что *элемент площади* гладкой гиперповерхности H на (\mathbb{M}^n, g) можно задать инвариантной формой

$$dA = \sqrt{\det g_{\alpha\beta}^*} du_1 \dots du_{n-1}, \quad (2)$$

где $g_{\alpha\beta}^*$ – риманова метрика на H , порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} по формуле:

$$g_{\alpha\beta}^*(u) = g_{ij}(x(u)) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}, \quad (3)$$

где $x(u)$ – гладкая параметризация поверхности H с $\nabla_u x \neq 0$, ср., напр., § 88 в [15].

Напомним, что геодезическая сфера в достаточно малой окрестности произвольной точки гладкого риманового многообразия – гладкая поверхность, см. [11], с. 106.

Для нас важны следующие фундаментальные факты, см., напр., лемму 5.10 и следствие 6.11 в [11], а также [9], с. 260-261.

Предложение 1. В каждой точке гладкого риманова многообразия существуют ее окрестности и соответствующие локальные координаты в них, в которых геодезическим сферам с центром в данной точке соответствуют евклидовы сферы с теми же радиусами и с центром в начале координат, а связке геодезических, исходящих из данной точки, соответствует связка отрезков лучей, исходящих из начала координат.

Окрестности и координаты, указанные в предложении 1, принято называть *нормальными*.

Замечание 1. В частности, в нормальных координатах геодезические сферы имеют естественную гладкую параметризацию через направляющие косинусы соответствующих лучей, исходящих из начала координат. Кроме того, метрический тензор g в начале этих координат совпадает с единичной матрицей, см., напр., предложение 5.11 в [11], а ввиду его непрерывности g произвольно близок к единичной матрице в достаточно малых окрестностях нуля.

Борелеву функцию $\rho : \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$ называем *допустимой* для семейства k -мерных поверхностей Γ в \mathbb{M}^n , $k = 1, 2, \dots, n - 1$, пишем $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^k dA \geq 1$$

для любого $S \in \Gamma$. *Модуль семейства* Γ есть величина

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{M}^n} \rho^n dv.$$

Далее говорим, что некоторое свойство P имеет место для п.в. (почти всех) $S \in \Gamma$, если модуль подмножества Γ_* тех $S \in \Gamma$, для которых свойство P нарушается, равен нулю.

Аналогично [12], измеримую относительно меры объема v функцию $\rho : \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$ называем *обобщенно допустимой* для семейства Γ , состоящего из k -мерных поверхностей S в \mathbb{M}^n , пишем $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$, если условие допустимости выполнено для п.в. $S \in \Gamma$.

Здесь мы говорим также, что семейство Γ_1 *минорируется* с семейством Γ_2 , пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для любой $S \in \Gamma_1$ найдется $S' \in \Gamma_2$ такая, что $\mathcal{A}_S(B) \geq \mathcal{A}_{S'}(B)$ для любого борелевского множества B в \mathbb{M}^n . Как известно, тогда $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$, см., напр., [22].

В дальнейшем, для множеств A, B и C на многообразии (\mathbb{M}^n, g) , $n \geq 2$, символом $\Delta(A, B; C)$ обозначаем множество всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^n$, соединяющих A и B в C , т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a, b)$.

Всюду далее мы предполагаем, что (\mathbb{M}^n, g) и (\mathbb{M}_*^n, g^*) – гладкие римановы многообразия. В дальнейшем подразумевается, что геодезические сферы $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) = \varepsilon\}$, геодезические шары $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ и геодезические кольца $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{M}^n : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ лежат в нормальной окрестности точки x_0 .

Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением Геринга для квазиконформных отображений в [6], было впервые введено в \mathbb{R}^n , см. статью [10], а также монографию [12].

Пусть D и D_* – области на гладких римановых многообразиях (\mathbb{M}^n, g) и (\mathbb{M}_*^n, g^*) , $n \geq 2$, соответственно, и пусть $Q : \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D_*$ называется *кольцевым Q -гомеоморфизмом в точке $x_0 \in \overline{D}$* , если условие

$$M(\Delta(f(C), f(C_0); D_*)) \leq \int_{A \cap D} Q(x) \cdot \eta^n(d(x, x_0)) dv(x) \quad (4)$$

выполняется для любого геодезического кольца $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < \infty$, любых двух континуумов (компактных связных множеств) $C \subset \overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap D$ и $C_0 \subset D \setminus B(x_0, \varepsilon)$ и любой измеримой функции $\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, такой что

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr \geq 1. \quad (5)$$

Будем также говорить, что f является *кольцевым Q -гомеоморфизмом в D* , если (4) выполнено для всех точек $x_0 \in \overline{D}$.

Пусть даны области D и D_* на (\mathbb{M}^n, g) и (\mathbb{M}_*^n, g^*) , $n \geq 2$, соответственно, и измеримая функция $Q : \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$. Следуя [10], см. также [12], гомеоморфизм $f : D \rightarrow D_*$ будем называть *нижним Q -гомеоморфизмом в точке $x_0 \in \overline{D}$* , если существует $\delta_0 \in (0, d(x_0))$, $d(x_0) = \sup_{x \in D} d(x, x_0)$, такое что для всякого $\varepsilon_0 < \delta_0$ и геодезических колец $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, выполнено условие

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dv(x), \quad (6)$$

где через Σ_ε обозначено семейство всех пересечений с областью D геодезических сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$.

Говорим, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow D_*$ является *нижним Q -гомеоморфизмом в области D* , если f является нижним Q -гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

2. Характеризация нижних Q -гомеоморфизмов. Аналог следующего критерия нижних Q -гомеоморфизмов был получен ранее в \mathbb{R}^n , см. теорему 2.1 в [10], а затем и на гладких многообразиях, см. теорему 4.1. в [1].

Лемма 1. Пусть D и D_* – области на гладких римановых многообразиях (\mathbb{M}^n, g) и (\mathbb{M}_*^n, g^*) , $n \geq 2$, соответственно, $Q : \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция, и пусть

$x_0 \in \overline{D}$. Гомеоморфизм $f : D \rightarrow D_*$ является нижним Q -гомеоморфизмом в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой нормальной окрестности $B(x_0, \varepsilon_0)$ точки x_0 с $\varepsilon_0 < d(x_0) := \sup_{x \in D} d(x, x_0)$

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0, r)} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (7)$$

где Σ_ε – семейство всех пересечений с областью D геодезических сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, и

$$\|Q\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int_{D(x_0, r)} Q^{n-1}(x) dA \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (8)$$

– L^{n-1} -норма Q по $D(x_0, r) = \{x \in D : d(x, x_0) = r\} = D \cap S(x_0, r)$.

Также будет полезно следующее утверждение, см. лемму 4.1 в [1].

Лемма 2. Пусть D и D_* – области на гладких римановых многообразиях (\mathbb{M}^n, g) и (\mathbb{M}_*^n, g_*) , $n \geq 2$, $Q : \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция и $f : D \rightarrow D_*$ – нижний Q -гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$. Тогда

$$M(\Delta(f(S), f(S_0); D_*)) \leq cI^{1-n}, \quad (9)$$

где $S = S(x_0, \varepsilon)$ и $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $B(x_0, \varepsilon_0)$ – нормальная окрестность точки x_0 ,

$$I = I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0, r)}, \quad (10)$$

$\|Q\|_{n-1}(x_0, r)$ определено в (8), а константа с произвольно близка к 1 в достаточно малых окрестностях точки x_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В частности, ввиду гомеоморфности f , из неравенства (9) следует, что $I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) \neq \infty$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в нормальной окрестности точки x_0 .

3. Связь нижних Q -гомеоморфизмов с кольцевыми. В дальнейшем мы придерживаемся стандартных соглашений, что $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$, если $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$, см., напр., [20].

Лемма 3. Пусть D – область на гладком римановом многообразии (\mathbb{M}^n, g) , $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < d(x_0) := \sup_{x \in D} d(x, x_0)$, $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ – геодезическое кольцо, $B(x_0, \varepsilon_0)$ – нормальная окрестность точки x_0 и пусть $Q : \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция, $Q \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Полагаем

$$\eta_0(t) = 1/I \cdot \|Q\|_{n-1}(x_0, t),$$

где $\|Q\|_{n-1}(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ и $I = I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ определены в (8) и (10), соответственно. Тогда

$$I^{1-n} = \int_{A \cap D} Q^{n-1}(x) \cdot \eta_0^n(d(x, x_0)) dv(x) \leq$$

$$\leq \int_{A \cap D} Q^{n-1}(x) \cdot \eta^n(d(x, x_0)) dv(x) \quad (11)$$

для любой измеримой функции $\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr = 1. \quad (12)$$

Доказательство. В дальнейшем мы пользуемся тем обстоятельством, что по замечанию 1 элементы объема и площадей на геодезических сферах в нормальных окрестностях точки x_0 эквивалентны евклидовым с коэффициентом эквивалентности произвольно близким к единице, а радиусы геодезических сфер $S(x_0, r)$ совпадают с евклидовыми в достаточно малых окрестностях, см. также (2) и (3).

Если $I = \infty$, то левая часть соотношения (11) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I = 0$, то $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) = \infty$ для п.в. $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ и обе части неравенства (11) равны бесконечности по теореме Фубини и замечанию 1. Пусть теперь $0 < I < \infty$. Тогда $\|Q\|_{n-1}(x_0, r) \neq 0$ и $\eta_0(r) \neq \infty$ п.в. в $(\varepsilon, \varepsilon_0)$. Полагая

$$\alpha(r) = \eta(r) \cdot \|Q\|_{n-1}(x_0, r)$$

и

$$\omega(r) = [\|Q\|_{n-1}(x_0, r)]^{-1},$$

по стандартным соглашениям будем иметь, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ п.в. в $(\varepsilon, \varepsilon_0)$ и что

$$L := \int_{A \cap D} Q_*(x) \cdot \eta^n(d(x, x_0)) dv(x) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \alpha^n(r)\omega(r) dr.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом, см. теорему 2.6.2 в [14], к выпуклой функции $\varphi(t) = t^n$, заданной в интервале $\Omega = (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с вероятностной мерой

$$\nu(E) = \frac{1}{I} \int_E \omega(r) dr,$$

получаем, что

$$\left(\int \alpha^n(r)\omega(r) dr \right)^{\frac{1}{n}} \geq \int \alpha(r)\omega(r) dr = \frac{1}{I},$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (12). Таким образом,

$$L \geq \frac{1}{I^{n-1}},$$

что и доказывает (12). \square

Следствие 1. При условиях и обозначениях лемм 1–3,

$$M(\Delta(f(S), f(S_0); D_*)) \leq c \int_{A \cap D} Q^{n-1}(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x), \quad (13)$$

где $S = S(x_0, \varepsilon)$ и $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$.

Следующая теорема устанавливает связь между нижними и кольцевыми Q -гомеоморфизмами.

Теорема 1. Пусть D и D_* – области на гладких римановых многообразиях (\mathbb{M}^n, g) и (\mathbb{M}_*^n, g_*) , $n \geq 2$, соответственно, и пусть $Q : \mathbb{M}^n \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция, $Q \in L_{loc}^{n-1}(D)$. Если $f : D \rightarrow D_*$ – нижний Q -гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$, то f является кольцевым Q_* -гомеоморфизмом в точке x_0 с $Q_*(x) = c \cdot Q^{n-1}(x)$, где константа c может быть выбрана произвольно близкой к 1.

Доказательство. Действительно, пусть C и C_0 – произвольные континуумы в $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap D$ и $D \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $B(x_0, \varepsilon_0)$ – нормальная окрестность точки x_0 .

Поскольку семейство кривых $\Delta(f(C), f(C_0); D_*)$ минорируется семейством $\Delta(f(S), f(S_0); D_*)$, где $S = S(x_0, \varepsilon)$ и $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$, то

$$M(\Delta(f(C), f(C_0); D_*)) \leq M(\Delta(f(S), f(S_0); D_*)),$$

и заключение теоремы получается из следствия 1. \square

Таким образом, в статье доказан фундаментальный результат (теорема 1), в котором установлено, что на гладких римановых многообразиях любой нижний Q -гомеоморфизм является кольцевым Q_* -гомеоморфизмом с $Q_* = c \cdot Q^{n-1}$.

1. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Об отображениях в классах Орлича-Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вестник. – 2011. – Т. 8, № 3. – С. 319-342.
2. Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki. – 2000. – № 256. – 22 pp.
3. Bishop C.J., Gutlyanski V.Ya., Martio O., Vuorinen M. On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – V. 22. – P. 1397-1420.
4. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию // М: Наука, Физматлит. – 1995.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц // М.: Наука. – 1966.
6. Gehring F.W. Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. – P. 353-393.
7. Ziemer W.P. Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 126, № 3. – P. 460-473.
8. Iwaniec T., Martin G. Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis // Oxford: Clarendon Press. – 2001.
9. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере // М.: МГУ. – 1960.
10. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И. К теории нижних Q -гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. – 2008. – Т. 5, № 2. – С. 159-84.
11. Lee J.M. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature // New York: Springer. – 1997.
12. Martio O., Ryzanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory // Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer. – 2009.
13. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия // М.: Изд-во МГУ. – 1990.

14. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane // Cambridge: Univ. Press. – 1995.
15. *Рашиевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ // М.: Гос. изд. тех.-теор. лит. – 1953.
16. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q -гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48, № 6. – С. 1361-1376.
17. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. 4, № 1. – С. 97-115.
18. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – V. 55, № 1-3. – P. 219-236.
19. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. 2009. – № 1. – P. 127-137.
20. *Сакс С.* Теория интеграла // М.: ИЛ. – 1949.
21. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – № 98. – P. 171-219.
22. *Hesse J.* A p -extremal length and p -capacity equality // Ark. Mat. – 1975. – V. 13. – P. 131-144.

O. S. Afanas'eva, R. R. Salimov

About relationship between ring and lower Q -homeomorphisms on the boundary.

In this article lower and ring Q -homeomorphisms on the smooth Riemannian manifolds are considered and its relationship become established.

Keywords: lower and ring Q -homeomorphisms, smooth Riemannian manifolds.

О. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов

Про взаємозв'язки кільцевих та нижніх Q -гомеоморфізмів на межі.

У даній роботі розглянуто нижні та кільцеві Q -гомеоморфізми на гладких ріманових многовидах і встановлено їх взаємозв'язок на межі.

Ключові слова: нижні та кільцеві Q -гомеоморфізми, гладкі ріманові многовиди.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
es.afanasjeva@yandex.ru
ruslan623@yandex.ru

Получено 10.11.11

УДК 004.048+004.932

©2011. Т. А. Беликова, В. Ю. Скобцов

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ПОИСК ЭФФЕКТИВНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФИЛЬТРОВ В ЗАДАЧЕ БИНАРИЗАЦИИ УЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассматривается задача построения последовательностей фильтров, позволяющих бинаризовать УЗ изображения сонных артерий с целью выделения просвета артерии. В работе предлагается алгоритм генетического программирования (ГП), осуществляющий поиск последовательностей фильтров, эффективно бинаризирующих УЗИ сонных артерий. Предложенный ГП-алгоритм программно реализован и проведен ряд вычислительных экспериментов на реальных УЗИ сонных артерий, подтверждающих его эффективность.

Ключевые слова: обработка изображений, УЗИ, фильтрация, эволюционные алгоритмы.

1. Введение. Лечение нарушений мозгового кровообращения является одной из наиболее актуальных медицинских проблем. Это обусловлено большой распространенностью цереброваскулярных заболеваний, ведущее место среди которых занимает ишемический инсульт, обусловленный атеросклерозом и другими сосудистыми патологиями. Ежегодно в мире регистрируется около 6 млн. случаев инсульта, в странах Западной Европы – 1 млн., США – от 400 до 500 тыс., в Украине – около 130-175 тыс. Смертность от инсульта составляет 12-15% общего показателя, то есть, занимает 2-3 место после заболеваний сердца и злокачественных новообразований разной локализации. Уровень смертности от инсульта в Украине в 2,5 раза превышает соответствующие показатели западноевропейских стран [1]. Одной из основных причин ишемического инсульта является образование в сонных артериях атеросклеротических бляшек, их дальнейшее разрушение и отрыв, что ведет к тромбозу сосудов головного мозга. Это делает актуальной проблему диагностики и определения опасности разрушения и отрыва атеросклеротических бляшек или эмбологенной опасности, являющихся причиной 82% инсультов в Украине.

Несмотря на быстрое развитие технологии УЗИ, анализ атеросклеротического поражения артерий на основании УЗ изображений остаётся субъективным процессом, эффективность которого во многом зависит от эксперта [2]. Попытки применения компьютерной обработки результатов УЗИ, с целью определения структуры и степени эмбологенной опасности атеросклеротических бляшек, предпринимаются уже 15 лет [3], однако применяемые в них методы не дают необходимых устойчивых результатов и часто подвергаются критике. Это является следствием сложности поставленной задачи, и таких её подзадач как поиск объекта интереса на изображении.

До настоящего момента не были найдены универсальные способы выделения и анализа интересующего фрагмента изображения, хотя разработано множество алгоритмов сегментации растровых изображений, позволяющих с определённой степенью качества решить задачу выделения объектов на изображении. Каждый из

этих алгоритмов качественно решает задачу только для определённого класса изображений, поэтому автоматизированный анализ нового класса изображений диктует необходимость разработки новых или модернизации существующих алгоритмов сегментации. Условно такие алгоритмы можно разделить на три класса: бинаризирующие изображение с помощью фильтров, векторизирующие изображение и комбинированные. Среди второго класса можно выделить волновой метод, метод активных контуров [4], основанный на пространственном анализе и его различные модификации [5], и др. Зависимость эффективности использования подобных алгоритмов векторизации (скорость и корректность) от характеристик исходного изображения влечёт за собой необходимость его предварительной фильтрации. Фильтрацию также зачастую используют как самостоятельный способ идентификации объектов на изображении.

Построение "вручную" эффективных последовательностей фильтров, для получения ожидаемого эффекта фильтрации, является нетривиальной и творческой задачей, требующей знания предметной области. Одним из способов автоматизации нахождения таких последовательностей является применение эволюционных вычислений [6-8]. Синтез эффективных цепочек фильтров, выбираемых из заданного множества, эквивалентен нахождению "хороших" точек в пространстве комбинаций фильтров, где каждая точка – цепочка фильтров некоторой длины. Пространство комбинаций фильтров очень велико с точки зрения поиска (например, для цепочки из 20 фильтров, с возможным использованием 30 их разновидностей, существует 30^{20} вариантов составления) и сложно формализуемо, что делает актуальным применение эволюционного поиска для решения данной задачи [7, 8]. Существует ряд работ, посвящённых поиску подобных эволюционных алгоритмов.

2. Анализ существующих исследований. Эволюционные алгоритмы в целом, и алгоритмы генетического программирования (ГП) в частности, уже длительное время применяются для обработки изображений, распознавания и идентификации объектов [6]. Так в работе [9] предложен алгоритм ГП для получения эффективных пороговых детекторов при идентификации сигналов, который также применим в задачах обработки изображений и машинного зрения. В работе [10] ГП используется для разработки эффективных фильтров для усиления и выделения признаков или построения алгоритмов сегментации, основанных на классификации пикселей. Предложенные в [11] результаты показывают, что ГП является одним из способов синтеза сложных операторов, позволяющих распознавать объекты. В работе [12] для генерации правил классификации шума/цели и идентификации объектов также используется алгоритм ГП, выделяющий зависимые признаки из множества заданных совокупностей признаков изображений. В [13, 14] ГП используется для получения автоматических распознавателей объектов.

Попытки фильтрации УЗ изображений с целью снижения шумов и сегментации предпринимаются уже давно и результаты некоторых таких работ позволяют получить дополнительные сведения и выводить взаимосвязи некоторых статистических параметров УЗ изображений и диагноза пациента, а также устанавливать наиболее оптимальные настройки УЗ оборудования. Так в [15] проводится сравне-

ние различных фильтров, позволяющих улучшить УЗ изображение путём снижения уровня шума. Результаты обработки изображения такими фильтрами, как медианный, морфологические, основанные на преобразовании Фурье, оценивались двумя экспертами, а также на основании математических статистик. В статье [16] описывается возможность грубой сегментации изображения на основании применения пороговых и сглаживающих фильтров. Используются модификации основанного на Гауссовом фильтре метода активных контуров, винеровское оценивание, статистические фильтры.

В работе [17] производится сегментация на УЗ изображении слоёв тканей артерии с целью измерения их толщины. Эксперименты проводились на 100 УЗ продольных изображениях коронарной артерии, результаты компьютерных расчётов сравнивались с измерениями двух экспертов, и не было выявлено никаких значительных различий в компьютерной и экспертной оценке. Тестирование метода проводилось следующим образом. На каждом из изображений вручную выбиралась область, содержащая стенку артерии. Выделенная область подвергалась фильтрации с целью устранения шумов при помощи фильтров, описанных в [15], затем бинаризовалась, проводилась дилатация бинаризованного изображения по множеству 3×3 , устранялись границы в нижней части выделенной области и строился контур с помощью В-сплайнов. В итоге были получены выделенные границы тканей. Также в [17] приведены статистические расчёты отклонений в компьютерной и экспертной оценке толщин тканей на различных УЗ изображениях артерии. Однако не было приведено результатов работы предложенного метода для менее "хороших" случаев УЗИ артерий, на которых нет такого чёткого различия в яркости слоёв артерии. Учитывая то, что получение УЗ изображений такого качества достаточно редкое явление, применимость предложенного метода в медицинской практике затруднительна.

Таким образом, в данной работе предлагается ГП-алгоритм, генерирующий последовательности фильтров бинаризации УЗИ. В отличие от алгоритмов, описанных в [9-14], в предложенном ГП-алгоритме, вход и выход каждого узла цепочки фильтров является изображением, а не числом. Также в работе используется большее число возможных значений узлов. В отличие от работы [17] мы постарались апробировать предложенный алгоритм на реальных УЗИ разного качества, в том числе и не очень "хорошего".

3. Пространственные методы обработки изображений. Термин пространственная область относится к множеству пикселей, составляющих изображение. Пространственные методы суть процедуры, оперирующие непосредственно значениями этих пикселей. К ним относятся градационные преобразования и пространственная фильтрация [18]. В данной работе, помимо вышеупомянутых методов, используется также морфологическая обработка изображений.

3.1. Линейная пространственная фильтрация. При пространственной фильтрации локальные преобразования оперируют одновременно как со значениями пикселей в окрестности, так и с соответствующими им значениями некоторой матрицы, имеющей те же размеры, что и окрестность. Такую матрицу называют фильтром,

маской, ядром или шаблоном. Значения элементов матрицы называют коэффициентами.

При линейной фильтрации отклик задаётся суммой произведений коэффициентов шаблона на соответствующие значения пикселей в области, покрытой маской фильтра. Фильтрация изображения f , имеющего размеры $M \times N$, с помощью фильтра размерами $m \times n$ задаётся выражением общего вида (1) [18]:

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t), \quad (1)$$

где $a = (m - 1)/2, b = (n - 1)/2$; $w(s, t)$ – коэффициенты матрицы фильтра.

При фильтрации всего изображения данная формула вычисляется для всех сочетаний $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ и $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

В данной работе используются следующие линейные пространственные фильтры:

1. Простейший усредняющий фильтр. Выход (отклик) простейшего линейного сглаживающего пространственного фильтра есть среднее элементов по окрестности, покрытой маской фильтра. Используются фильтры 3x3 и 5x5.
2. Фильтры, возвращающие взвешенное среднее по маске. Пиксели окрестности, покрываемой маской такого фильтра, оказывают неодинаковое влияние на отклик фильтра

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 10 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Фильтры, используемые для реализации простого и расширенного добавлением диагональных элементов дискретного лапласиана

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Составные фильтры, позволяющие получить сумму либо разность изображения обработанного по маске лапласиана с исходным. Применение таких фильтров (основанных на второй производной) позволяет подчеркнуть или уменьшить (в зависимости от знаков коэффициентов) разрывы уровней яркости на изображении, подавить области со слабым изменением яркости

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Фильтр, усиливающий высокие частоты, позволяющий в целом повысить яркость изображения

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Фильтры, основанные на "дискретных" значениях первых производных (операторы Собела и Превитта), позволяющие выделять горизонтальные, вертикальные и наклонные контура

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Фильтр Marr-Hildreth (лапласиан гауссиана) – составной оператор, менее чувствительный к шумам нежели вторая производная, за счёт сглаживающего эффекта функции Гаусса. (В данном случае сумма исходного изображения с отфильтрованным)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 17 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из нелинейных пространственных фильтров используются медианные фильтры (Median), заменяющие значение пикселя на значение медианы распределения яркостей всех пикселей в окрестности (включая исходный). Такие фильтры хорошо очищают изображения от импульсных шумов.

3.2. Градационные методы обработки изображений. В данной работе используется: линейное растяжение текущего диапазона яркостей пикселей на весь допустимый интервал яркости; пороговое преобразование (по порогу равному половине текущего диапазона яркости изображения); выравнивание (эквализация) гистограммы; а также приведение гистограммы к заданному виду.

Гистограммой цифрового изображения с уровнями яркости в диапазоне $[0, L - 1]$ называется дискретная функция $h(r_k) = n_k$, где r_k есть k -ый уровень яркости, а n_k – число пикселей на изображении, имеющих яркость r_k . Общей практикой является нормализация гистограммы путем деления каждого из ее значений на общее число пикселей в изображении, обозначаемое n . Тем самым, значения нормализованной гистограммы $p(r_k) = n_k/n$ для $k = 0, 1, \dots, L - 1$. А $p(r_k)$ есть оценка вероятности появления пикселя со значением яркости r_k . Заметим, что сумма всех значений нормализованной гистограммы равна единице. Дискретным аналогом интеграла функции распределения случайной величины будет

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^k p_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1. \quad (2)$$

На основании значений функции (2), согласно алгоритму выравнивания гистограммы [18], происходит замена яркостей пикселей. Преобразование (отображение), задаваемое формулой (2), называется эквализацией, выравниванием или линейризацией гистограммы. Преобразование направлено на растяжение гистограммы входного изображения и в случае необходимости автоматического улучшения. Это является хорошим подходом, поскольку результаты этого метода предсказуемы и он прост в реализации.

Кроме выравнивания, существует также метод называемый приведением гистограммы, он позволяет получить обработанное изображение с заданной формой гистограммы. В данной работе приведение гистограммы выполняется к форме, полученной посредством аппроксимации эмпирических распределений яркостей пикселей (рис. 1) различных легко бинаризуемых изображений.



Рис. 1. Гистограмма изображения, хорошо поддающегося бинаризации

Для обобщения формы гистограмм были выбраны кривые Джонсона по причине хорошей применимости для построения функций, аппроксимирующих гистограммы всех тестируемых изображений, и принадлежности одному классу.

Проверка применимости таких кривых выполняется на основании оценок третьего и четвёртого моментов, рассчитываемых по формулам (3):

$$\alpha_3 = \frac{1}{\eta s^3} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^3; \quad \alpha_4 = \frac{1}{\eta s^4} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^4; \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3)$$

Если выполнено условие (4), то кривые Джонсона неприменимы

$$\alpha_4 < 1 + \alpha_3. \quad (4)$$

При выполнении условия (5), считается, что распределение относится к классу Sb кривых Джонсона

$$\alpha_4 < 3(1 + 0,641\alpha_3^2). \quad (5)$$

Полученная кривая имеет вид, показанный на рис. 2а, и рассчитывается по формуле (6)

$$f(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(x - \epsilon)(\lambda - x + \epsilon)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\gamma + \eta \ln \left(\frac{x - \epsilon}{\lambda - x + \epsilon} \right) \right]^2 \right\}, \quad (6)$$

где η и γ вычисляются по формулам (7) и (8), ϵ – нижняя граница диапазона изменения случайной величины, λ – ширина диапазона изменения случайной величины

$$\eta = \frac{(u_{1-\alpha} - u_\alpha)}{\ln \frac{(x_{1-\alpha} - \epsilon)(\epsilon + \lambda - x_\alpha)}{(x_\alpha - \epsilon)(\epsilon + \lambda - x_{1-\alpha})}}. \quad (7)$$

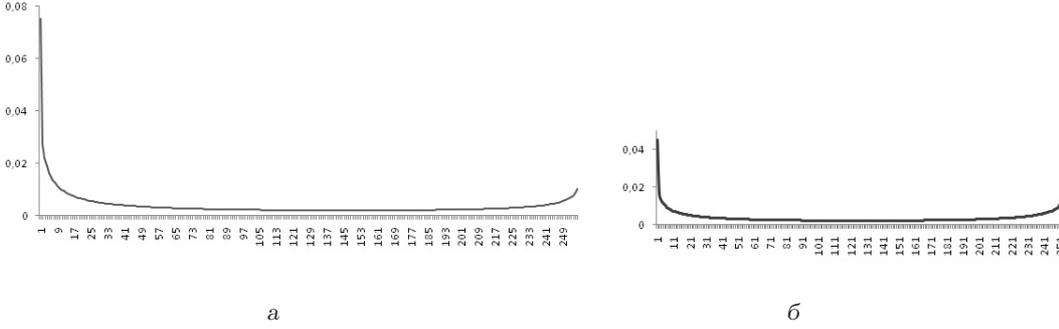


Рис. 2. Фрагмент кривой Джонсона класса S_b (а – по распределению Рис. 1; б – для $\gamma = 0$)

$$\gamma = u_{1-\alpha} - \eta \ln \left(\frac{x_{1-\alpha} - \epsilon}{\epsilon + \lambda - x_{1-\alpha}} \right), \quad (8)$$

где u_α – alpha-квантиль стандартного нормального распределения, x_α – эмпирическая квантиль ($[\alpha(n + 1)]$ -й упорядоченный член выборки $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$) [18, 19].

3.3. Морфологическая фильтрация. Большая часть морфологических алгоритмов обработки изображений использует операции эрозии и дилатации. Операция дилатации определяется формулой (9):

$$(f \oplus B)(x, y) = \sup\{f(s, t); (s, t) \in B_a\}, \quad (9)$$

где $a = (x, y)$ – вектор, задающий смещение множества B , а B – множество, по которому осуществляется операция дилатации.

Дилатация по [21] сглаживает пики, поднимает общую яркость неоднородных частей изображения.

Операция эрозии определяется формулой (10):

$$(f \ominus B)(x, y) = \inf\{f(s, t); (s, t) \in B_a\}, \quad (10)$$

где $a = (x, y)$ – вектор, задающий смещение множества B , а B – множество, по которому осуществляется эрозия.

Эрозия [21] сглаживает впадины, понижает общую яркость неоднородных частей изображения. Графическое представление принципа работы операций эрозии и дилатации для функции одной переменной представлены на рис. 3.

Последовательное применение приведенных выше морфологических фильтров называется операциями открытия и закрытия, и осуществляется по формулам (11) и (12), соответственно:

$$(f \circ B)(x, y) = ((f \ominus B) \oplus B)(x, y), \quad (11)$$

$$(f \bullet B)(x, y) = ((f \oplus B) \ominus B)(x, y). \quad (12)$$

Закрытие сглаживает мелкие "впадины" яркости и линии контура на изображении. Открытие убирает небольшие пики и сглаживает линии контура на изображении

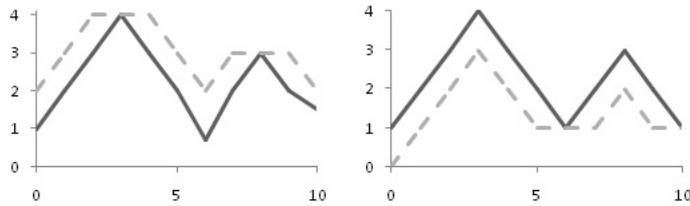


Рис. 3. Графическое представление принципа работы операции эрозии и дилатации в плоскости $y=0$

[21]. В данной работе применяются морфологические фильтры эрозии, дилатации, открытия и закрытия по множествам 3×3 и 5×5 .

4. Эволюционный алгоритм поиска. Построение "вручную" последовательностей фильтров является нетривиальной и сложной задачей, требующей знания предметной области. Одним из способов автоматизации нахождения таких последовательностей является применение эволюционных вычислений, в частности ГП [6-8].

В терминах генетического программирования, пространство поиска – это пространство, из которого выбираются особи популяций, а "хорошие" точки – это особи со сравнительно большим фитнесом. Каждая особь представляет собой ациклический граф, узлами которого являются фильтры (рис. 4).

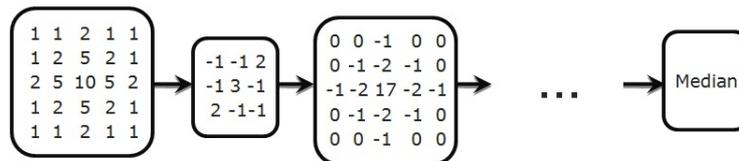


Рис. 4. Графическое представление особи популяции

Начальная популяция генерируется случайным образом, а все последующие посредством применения операторов кроссинговера и мутации к особям популяции, сгенерированной на предыдущем шаге алгоритма. Селекция особей для скрещивания осуществляется на основании значения фитнес-функции по принципу "колеса рулетки" [7, 8].

Формально алгоритм можно записать следующим образом:

1. случайным образом сгенерировать популяцию G размера N и рассчитать фитнес функцию для каждой особи популяции,
2. сохранить лучшую особь популяции G ,
3. выбрать 2 особи из G для оператора кроссинговера на основании значения фитнес-функции, выполнить кроссинговер,
4. выбрать 2 особи с наименьшей фитнес-функцией в G и заменить их получившимися на шаге 3 потомками,

5. рассчитать значение фитнес-функции полученных потомков и фитнес их подузлов, сохранить "хорошие" фрагменты хромосом в библиотеку,
6. если заданный уровень кроссинговера не достигнут, перейти к шагу 3,
7. с заданной вероятностью осуществить мутацию над каждой особью текущей популяции,
8. заменить худшую особь в полученной популяции на лучшую особь исходной популяции,
9. перейти к шагу 2, если количество поколений меньше M , иначе выход.

Фитнес-функция каждой особи вычисляется на основании соответствия отфильтрованных фрагментов желаемым результатам. В данном случае желаемым результатом является высококонтрастное изображение, ярким пикселям которого соответствуют области расположения экзогенных тканей (в т.ч. стенок артерий), а темным – кровь и ткани с низкой экзогенностью.

Если обозначить множество ярких пикселей эталонного фрагмента Q_i , а Q'_i – множество ярких пикселей отфильтрованного с помощью некоторой особи текущей популяции i -го фрагмента, $n(Y)$ – число пикселей в множестве Y , а m – число фильтруемых фрагментов, то значение фитнес-функции этой особи вычисляется по формуле (13)

$$Fitness = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{n(Q_i \cap Q'_i)}{n(Q_i \cup Q'_i)}. \quad (13)$$

Множество фрагментов изображений (а не изображения целиком, с целью сокращения времени обработки) и ожидаемый результат фильтрации (в виде бинарного шаблона) задаются вручную. Для получения, в конечном итоге, наиболее эффективных цепочек фильтров важна репрезентативность множества обрабатываемых фрагментов. Входом и выходом каждого узла графа является изображение.

Предложенный алгоритм использует операторы одноточечного случайного и взвешенного кроссинговера. Суть последнего в том, что родительские особи скрещиваются в подузлах с наименьшим фитнесом. В зависимости от номера поколения вероятность взвешенного кроссинговера повышается. Применяется оператор мутации двух видов: случайная и взвешенная мутация. При мутации первого вида, мутирующий узел заменяется случайно выбранным фильтром из множества допустимых. Вероятность взвешенной мутации узла зависит от его фитнеса. В зависимости от номера поколения вероятность взвешенной мутации, по сравнению со случайной, повышается.

Предложенный выше ГП алгоритм, в отличие от разработанных в [9-14], не является алгоритмом идентификации объекта на изображении, а используется для первичной его фильтрации, перед последующей векторизацией, с целью повышения эффективности алгоритмов векторизации.

5. Полученные результаты. Вышеописанный алгоритм был реализован в виде программного приложения, с помощью которого были получены экспериментальные данные, приведенные в таблице 1 (КЗ – количество запусков, МП – мощность популяции, Ср.зн.ф.ф. – Среднее значение фитнес-функции, ЧЭ – число эпох).

Таблица 1

КЗ	Число исп. фильтров	Тип исп. фильтров	Вер-ть мутации	Вер-ть крос-ра	МП	КЭ	Ср.зн. ф.ф.
10	20	линейные	0,1	0,6	80	70	0,693568
10	30	линейные, морф., Median	0,1	0,6	80	70	0,728416
10	34*	линейные, морф., Median, градационные	0,1	0,6	80	70	0,812882
20	34	линейные, морф., Median, градационные	0,1	0,6	80	70	0,835352

В первой строке таблицы приведены усреднённые результаты 10 запусков алгоритма ГП, строящего последовательности из 20 возможных вариантов линейных пространственных фильтров. Значения фитнес-функции лучшей особи в среднем было равно 0,693568. Но лучшее значение фитнес-функции 0,714353 было достигнуто на особи, представленной в таблице 2.

Таблица 2

1 1 1	1 1 1	-1 -1 2	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	0 -1 0
1 -8 1	1 1 1	-1 3 -1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	-1 5 -1
1 1 1	1 1 1	2 -1 -1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	0 -1 0
			1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	
			1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	

Следует отметить, что качество фильтрации, и в частности бинаризации, зависит от гистограммы исходного изображения. В описанном данном случае поиск последовательностей производился на изображениях с неблагоприятными для фильтрации формами гистограммы. Исходные изображения и их гистограммы, результаты фильтрации данных изображений и желаемый результат (шаблон сравнения), приведены на рис. 5.

Во второй строке таблицы 1 приведены усреднённые результаты 10 запусков алгоритма ГП, строящего последовательности из 20 линейных пространственных фильтров, 2-х медианных фильтров различных размеров и морфологических фильтров (эрозии, дилатации, открытия и закрытия), всего 30 вариантов значений хромосом особи. Значения фитнес-функции лучшей особи в среднем было равно 0,7284157. Но лучшее значение фитнес-функции 0,787312 было достигнуто на особи, представленной в таблице 3.

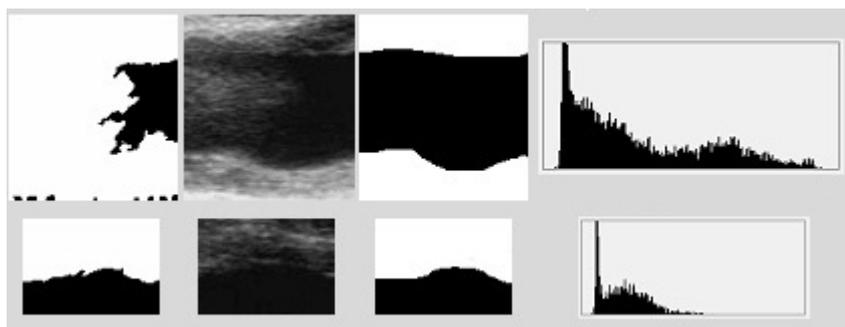


Рис. 5. Результаты фильтрации, исходные изображения, шаблон сравнения, гистограммы

Таблица 3

0 1 0	Dilation	Dilation	Dilation	Dilation
1 -3 1	(5x5)	(3x3)	(5x5)	(5x5)
0 1 0				

Изображения, результаты фильтрации данных изображений и желаемый результат (шаблон сравнения), приведены на рис. 6. Исходные изображения для тестирования были взяты для всей таблицы 1 одинаковыми с целью сравнить результаты работы алгоритма в зависимости от набора возможных узлов последовательности фильтрации.

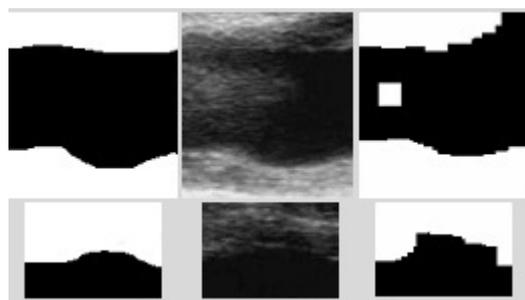


Рис. 6. Результаты фильтрации, исходные изображения, шаблон сравнения

В третьей строке таблицы 1 приведены усреднённые результаты 10 запусков алгоритма ГП, строящего последовательности из 20 линейных пространственных фильтров, 2-х медианных фильтров различных размеров и морфологических фильтров (эрозии, дилатации, открытия и закрытия), а также 4-х градационных преобразований (линейное растяжение диапазона яркостей, пороговый фильтр, выравнивание гистограммы и приведение гистограммы), всего 34 варианта значений хромосом особи. Значения фитнес-функции лучшей особи в среднем было равно 0,812881778. Но лучшее значение фитнес-функции 0,842733 было достигнуто на особи, представленной в таблице 4.

Таблица 4

-1 -1 2	Dilation (5x5)	Dilation (3x3)	Dilation (5x5)	Equalization	Erosion (3x3)
-1 3 -1					
2 -1 -1					

Изображения, результаты фильтрации данных изображений и желаемый результат (шаблон сравнения), приведены на рис. 7.

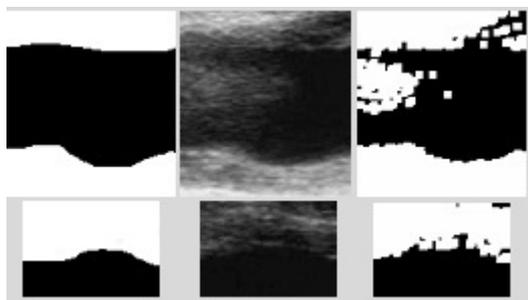


Рис. 7. Результаты фильтрации, исходные изображения, шаблон сравнения

Количество фильтров в третьей строке таблицы 1 отмечено звездочкой, потому что градационное преобразование – приведение гистограммы, в данном случае производилось к виду, показанному на рисунке 2б, и по итогам тестирования не дало результатов, т.к. не вошло в состав хромосомы лучшей особи.

Функция распределения рис. 2б была выбрана на основании визуальной оценки внешнего вида гистограмм и построена с помощью кривых Джонсона класса Sb ($\gamma = 0$). В методе приведения гистограммы, использованном в тестах, результаты которых отображены в четвёртой строке таблицы 1, использовалась функция, коэффициенты которой были посчитаны программно на основании гистограмм изображений, хорошо поддающихся фильтрации. График этой функции был приведен на рисунке 2а. Среднее значение фитнес-функции, полученное на 20 тестовых запусках программы при использовании 34 возможных вариантов фильтров – 0,8353516. При этом фитнес лучшей особи приведенной в таблице 5 был равен 0,868683.

Таблица 5

Dilation (5x5)	-1 -1 2 -1 3 -1 2 -1 -1	Median (3x3)	Histogram Matching	Median (5x5)	Dilation (5x5)
-------------------	-------------------------------	-----------------	-----------------------	-----------------	-------------------

Результаты обработки тестовых изображений таким фильтром представлены на рис. 8.

6. Выводы. По результатам бинаризации видно, что сами по себе линейные пространственные фильтры не могут обеспечить приемлемый вид бинаризованного изображения. Добавление возможностей морфологической фильтрации значительно улучшает ситуацию, однако очерчивает линии контура грубо. Градационные преобразования позволяют добиться плавных контуров бинаризованных изображений,

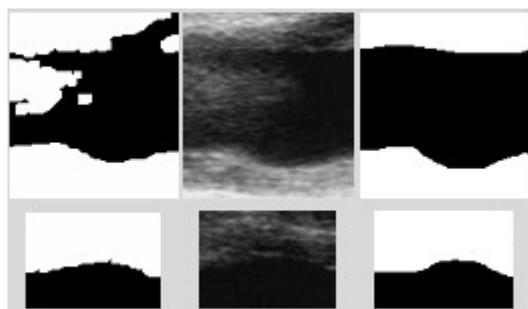


Рис. 8. Результаты фильтрации, исходные изображения, шаблон сравнения

однако не могут предоставить достаточно точное соответствие заданному шаблону.

В дальнейшем для улучшения результатов планируется добавить градационные фильтры, основанные на локальных статистиках, адаптивные пороговые фильтры, а также усовершенствовать ГП алгоритм, снизив вероятность его схождения к локальным экстремумам.

1. *Кобза I.* Патология сонных артерий: посібник-атлас. – Львів: Манускрипт – Львів, 2008. – 106 с.
2. *Sayed Aly, Christopher C. Bishop* An Alternative Method to Identify Unstable Plaque // *Stroke*, № 31. – PP. 1921-1924. – 2000.
3. *Suri S.J., Molinari F.* Atherosclerosis disease management. – Springer, 2011.
4. *Kaas M., Witkin A., Terzopoulos D.* Snakes: Active Contour Models // *Int. Journal of Computer Vision*. – 1987. – № 1. – P. 312-331.
5. *Петров В.О., Привалов О.О.* Модификация алгоритма активных контуров для решения задачи интерактивной сегментации растровых изображений дефектов металлических отливок // *Физико-математические науки*. – № 6. – 2008. – С. 14-16.
6. *Lin Y.* Feature synthesis and analysis by evolutionary computation for object detection and recognition. – University of California, Riverside, 2003.
7. *Mitchell M.* Introduction to genetic algorithms. – MIT Press, 1999.
8. *Скобцов Ю.А.* Основы эволюционных вычислений. – Донецк: ДонНТУ, 2008.
9. *Harris C., Buxton B.* Evolving edge detectors with genetic programming // *Genetic Programming, Proceedings of the 1st Annual Conference, Stanford University*, PP. 309–314. The MIT Press, Cambridge, 1996.
10. *Poli R.* Genetic programming for feature detection and image segmentation // *Evolutionary Computation*, T.C.Forgarty Ed., PP. 110-125. – 1996.
11. *Bhanu B., Lin Y.* Learning composite operators for object detection // *Proc. Genetic and Evolutionary Computation Conference*, PP. 1003-1010. – July, 2002.
12. *Stanhope S.A., Daida J.M.* Genetic programming for automatic target classification and recognition in synthetic aperture radar imagery // *Evolutionary Programming VII: Proceedings of the Seventh Annual Conference on Evolutionary Programming*, Berlin: Springer-Verlag, pp. 735–744. – 1998.
13. *Roberts S.C., Howard D.* Evolution of vehicle detectors for infrared line scan imagery. – Berlin, Germany: Springer-Verlag, PP. 110-125. – 1999.
14. *Bhanu B. et al.* Guest Editorial Introduction To The Special Issue On Automatic Target Detection And Recognition // *IEEE Transactions On Image Processing*. – Vol. 6, № 1. – Jan 1997.
15. *Loizou C.P., Pattichis C.S.* Comparative Evaluation of Despeckle Filtering In Ultrasound Imaging of the Carotid Artery // *Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 52, N 10. – 2005.
16. *Lin N., Yu W., Duncan J.S.* Combinative Multi-Scale Level Set Framework for Echocardiographic Image Segmentation // *Medical Image Analysis, Volume 7, Issue 4, December 2003*. – P. 529-537.

17. Loizou C. P., Pattichis C. S., Pantziaris M., Nicolaides A. Snakes based segmentation of the common carotid artery intima media, Med Bio Eng Comput. – № 45. – PP. 35-49. – 2007.
18. Гонсалес, Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – Москва: Техносфера, 2005. – 1072 с.
19. Кобзарь А. Прикладная математическая статистика. – Москва: Физматлит, 2006. – 816 с.
20. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. – Москва: Мир, 1969. – 395 с.
21. Serra J. Image analysis and mathematical morphology. – Academic Press, London, 1982.

T. Belikova, V. Skobtsov

Evolutionary search of effective filters sequences in the ultrasound images binarization problem.

The problem of constructing a sequence of filters which binarize ultrasound image of arteries is considered in order to separate an arterial lumen. This paper proposes a genetic programming algorithm that searches for sequences of filters which effectively binarize ultrasound carotid atheroma. A number of computational experiments was performed on real ultrasound of carotid arteries. They confirm its effectiveness.

Keywords: *image processing, ultrasound, filtration, evolutionary algorithms.*

Т. О. Белікова, В. Ю. Скобцов

Еволюційний пошук ефективних послідовностей фільтрів у задачі бінаризації УЗ зображень.

Розглянуто задачу побудови послідовностей фільтрів для бінаризації УЗ зображень артерій з метою виділення просвіту артерії. У роботі пропонується алгоритм генетичного програмування (ГП), який здійснює пошук послідовностей фільтрів, ефективно бінаризуючих УЗ зображення сонних артерій. Запропонований ГП-алгоритм програмно реалізований і проведено низку обчислювальних експериментів на реальних УЗД сонних артерій, що підтверджують його ефективність.

Ключові слова: *обробка зображень, УЗД, фільтрація, еволюційні алгоритми.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
belikova.taisija@gmail.com
skobtsov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 11.12.11

УДК 004.048:004.622

©2011. Т. А. Васяева, С. В. Хмелевой, Д. Е. Иванов

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОКОГО РИСКА ПАТОЛОГИЧЕСКОЙ ПОТЕРИ КРОВИ ПРИ РОДАХ

В данной работе предлагается решение актуальной задачи определения риска возникновения патологического акушерского кровотечения. Применение генетического программирования (ГП) позволяет выполнять классификацию на патологическое и допустимое кровотечение. Предлагается модификация способа кодирования особей для генетического программирования. Выполнено тестирование на реальных медицинских данных.

Ключевые слова: генетическое программирование, классификация, кодирование.

Введение. Разработка и внедрение медицинских компьютерных аналитических систем является одной из наиболее актуальных задач предметной области информационных технологий. В данной работе предлагается решение актуальной задачи определения риска возникновения патологического кровотечения при родах [1]. Для сравнения ежедневно в мире от осложнений, связанных с беременностью и родами, умирает около 1500 женщин. Причем 80% смертей обусловлено прямыми причинами: кровотечения, инфекции, гестозы, патологические роды. Лидирует в этом списке смертность в результате массивной кровопотери. При этом если даже удастся предотвратить гибель женщины, то следствием перенесенного критического состояния является развитие какой-либо тяжелой хронической патологии – вплоть до инвалидности. Таким образом, данная проблема носит не только медицинский, но и выраженный социальный характер. По оценкам экспертов большинство этих случаев можно было предотвратить. Для практики важно определять риск возможной потери крови при родах более чем 0,5% от массы тела, с целью принятия соответствующих мер.

1. Постановка задачи. При решении задачи прогнозирования необходимо определить функцию вида (1)

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

где Y – исследуемая величина, зависящая от факторов $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

В нашем же случае важно определить риск потери крови при родах более чем 0,5% от массы тела, с целью принятия соответствующих мер. По сути, необходимо выполнить разбиение на два класса: патологическое кровотечение и допустимое. То есть наша целевая переменная принимает дискретные значения, и в контексте нашей задачи рассматривается классификация.

Итак, Y – кровотечение патологическое или допустимое, x_1, x_2, \dots, x_n – факторы риска развития патологической потери крови при родах, функция (1) определяет тип кровотечения при определенных значениях факторов x_1, x_2, \dots, x_n . Значение функции равно единице означает высокую степень риска патологического акушер-

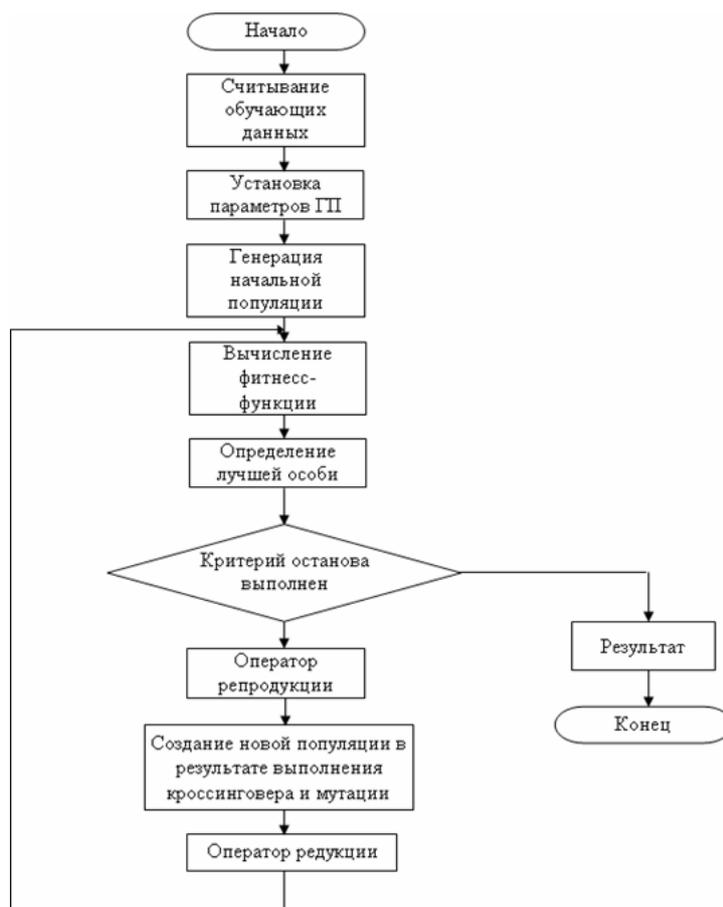


Рис. 1. Обобщенный алгоритм работы ГП

ского кровотока, а нулю – соответственно низкую. Задача решается методом, который предполагает обучение с учителем. При обучении с учителем необходимо сформировать обучающую выборку. В нашем случае обучающая выборка представляет собой реальные медицинские данные, полученные при обследовании беременных женщин.

Так как решается задача классификации на два класса, то для ее решения можно использовать математический аппарат булевых функций в виде древообразных структур [2]. При этом листьями дерева являются факторы риска, которые приведены к бинарным значениям, функциональными узлами – логические функции (И, ИЛИ, НЕ), а корень дерева определяет значение булевой функции, где единица соответствует патологическому кровотечению, а ноль – допустимому. После этапа обучения полученное дерево, реализующее определенную булеву функцию, будет выполнять классификацию на допустимую или патологическую потерю крови при родах.

В качестве ошибки классификации будем использовать долю правильной клас-

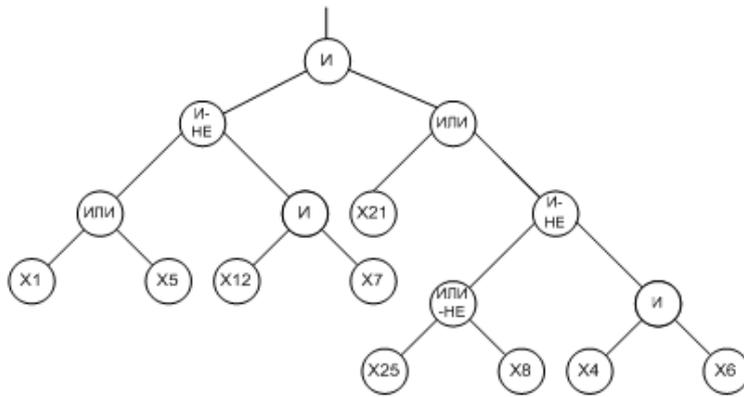


Рис. 2. Пример структуры дерева для классификации акушерских кровотечений

сификации (2):

$$E = \frac{1}{M} \cdot \left(M - \sum_{i=1}^M (|F_i - Y_i|) \right), \quad (2)$$

где M – количество обучающих примеров, F – полученный результат классификации, Y – желаемый результат классификации.

2. Разработка алгоритма. Исходные данные должны быть предварительно обработаны, основное назначение предобработки – преобразовать входное обучающее множество в булевозначный вектор. Далее определяются терминальное и функциональное множества, фитнес-функция, значения параметров эволюционного алгоритма. Решением задачи будет булева функция, представленная в виде дерева, которое можно использовать для классификации акушерских кровотечений. Общий алгоритм представлен на рис. 1.

В контексте нашей задачи ГП используется для получения классификационного дерева (пример структуры показан рис. 2). Дереву на рис. 2 соответствует булева функция (3):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{176}) = \overline{(x_1 \vee x_5) \cdot (x_{12} \cdot x_7)} \cdot (x_{21} \vee \overline{(x_{25} \vee x_8)}) \cdot (x_4 \cdot x_6). \quad (3)$$

Терминальное множество в данном случае составляют факторы риска развития патологического акушерского кровотечения, которые после предобработки представляют собой булевозначный вектор.

Основными логическими операциями являются: ИЛИ, И, НЕ. Все эти операции всегда имеют один выход, но могут иметь разное количество входов. Так как первые две функции могут иметь два и более входа, а последняя только один, то для более удобной программной реализации выполним замену операции НЕ на следующие две: ИЛИ-НЕ и И-НЕ. Такая замена позволит унифицировать количество входов для всех операций (их будет всегда 2). Таким образом, функциональное множество составляют 4 логические функции ИЛИ, И, ИЛИ-НЕ и И-НЕ. К тому же, такой

Таблица 1. Параметры эволюционного алгоритма

Параметр	Допустимые значения
Мощность популяции	Задается
Максимальная глубина особи	Задается
Метод генерации начальной популяции	– растущая $p_g = 1$ – полная $p_c = 1$ – смешенная $p_g + p_c = 0,5 + 0,5 = 1$
Вероятность функционального узла	0,5
Вероятность терминального узла	0,5
Вероятность кроссинговера	Задается
Вероятность мутации	Задается
Отбор родителей	– рулетка

логический базис позволяет избавиться от так называемых интронов (бесполезных участков), в данном случае – от двойного отрицания ($\text{НЕ}(\text{НЕ}(X))$).

В качестве фитнес-функции используется доля пациентов с правильно определенным акушерским кровотечением (2), в которой переменные Y (желаемый результат классификации) и F (полученный результат классификации) принимают булевы значения 0 или 1. Единица соответствует высокой степени риска развития патологической потери крови при родах, а ноль – низкой степени риска развития патологической потери крови при родах.

Для получения классификационного дерева необходимо выполнить следующие этапы:

1. Установить параметры ГП, которые представлены в табл. 1.
2. Сгенерировать начальную популяцию. Популяция состоит из некоторого количества хромосом (особей). Каждая особь соответствует определенному дереву, которое представляет собой решение, например, как на рис. 2. Особь (дерево) на начальном этапе генерируется случайным образом и состоит из функциональных и терминальных узлов.
3. По значению фитнес-функции (2) оценить все особи, входящие в популяцию.
4. Выполнить генетические операторы.
5. Проверить условие останова. Если критерий останова выполнен, то перейти на шаг 6, иначе на шаг 3.
6. Выбрать лучшую особь (с максимальным значением фитнес-функции), которая будет результатом работы ГП, а соответствующее ей дерево – решением поставленной задачи (классификационным деревом, выполняющим классификацию на патологическое акушерское кровотечение и допустимое).
7. В процессе поиска решений можно использовать различные значения параметров ГП.

3. Генерация начальной популяции. На данном этапе происходит генерация начальной популяции в соответствии с заданными параметрами. Популяция состо-

ит из набора деревьев, сгенерированных случайным образом. Генерация каждого дерева происходит рекурсивно, начиная с генерации функционального узла и его аргументов. Для каждого дочернего узла (аргумента) случайным образом определяется, будет данный узел функциональным или терминальным, далее в соответствии с типом узла выбирается его значение из соответствующего терминального или функционального множества. Процесс выполняется по левой ветви до тех пор, пока не будет выбран дочерним терминальный узел. Затем генерируются правые ветви.

Предусмотрены следующие методы создания деревьев [2]:

1. **Полный.** При генерации случайного дерева каждая ветвь имеет одинаковую (максимальную) глубину.

2. **Растущий.** При генерации случайного дерева каждая ветвь может иметь различную глубину, но не более чем заданная максимальная.

3. **Комбинированный.** Половина деревьев всей популяции генерируется полным методом, вторая половина – растущим.

4. Применение генетических операций.

Отбор родителей [2-3]. Важнейшим фактором, который влияет на эффективность ГП, является оператор отбора. Слепое следование принципу "выживает сильнейший" может привести к сужению пространства области поиска решения и попаданию найденного решения в область локального экстремума фитнес-функции. С другой стороны, достаточно слабый оператор отбора может привести к медленному росту качества популяции, что приведет к замедлению поиска решения. Кроме того, популяция при таком подходе может не только не улучшаться, но и ухудшаться. Использован отбор пропорционально значению фитнес-функции, реализованный методом рулетки.

Кроссинговер. Для древообразной формы представления используются следующие три основных типа оператора кроссинговера (ОК) [2, 4-5]:

- узловой кроссинговер;
- кроссинговер поддеревьев;
- смешанный.

Узловой оператор кроссинговера выполняется следующим образом:

– выбираются два дерева и узлы в этих деревьях. Так как узлы в деревьях могут быть разного типа, сначала необходимо убедиться, что выбранные узлы у родителей являются взаимозаменяемыми. Если тип узла во втором родителе отличен от типа узла первого родителя, то во втором родителе случайным образом выбирается другой узел, после чего опять выполняется проверка на предмет совместимости;

– производится обмен выбранных узлов.

Пример узлового ОК показан на рис. 3.

В кроссинговере поддеревьев родители обмениваются не самими узлами, а соответствующими им поддеревьями. Такой ОК выполняется следующим образом:

– выбираются родители и узлы в них. Далее необходимо убедиться, что выбранные узлы принадлежат одному типу (функциональному или терминальному). Если

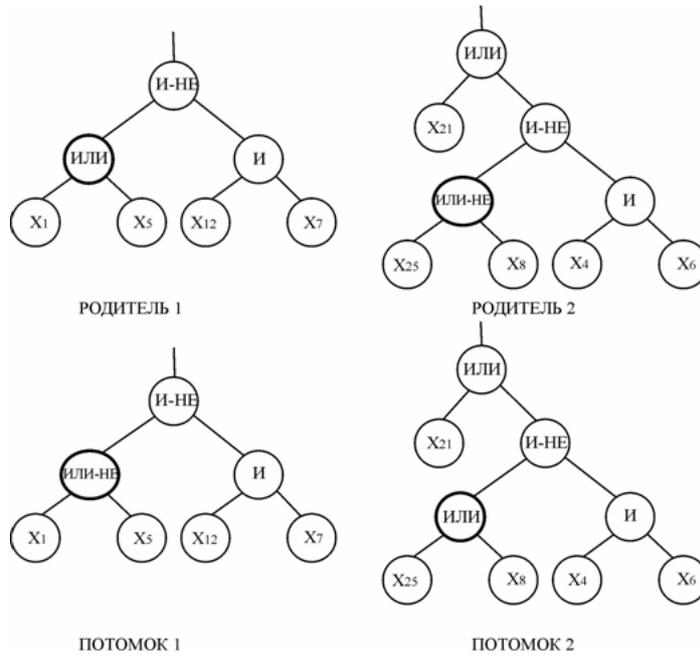


Рис. 3. Пример выполнения узлового ОК

это условие не выполняется, то, как и в предыдущем случае, во втором дереве выбирается другой узел с последующей проверкой на взаимозаменяемость;

– производится обмен поддеревьев, которые соответствуют этим выбранным узлам. Вычисляется глубина дерева для каждого потомка. Если ожидаемый размер не превышает заданный порог, то потомки запоминаются.

Обмен поддеревьями возможен и в одном родителе. Пример ОК поддеревьев показан на рис. 4.

При смешанном операторе кроссинговера для одних особей выполняется узловой оператор кроссинговера, а для других – кроссинговер поддеревьев.

Мутация. Для деревьев применимы следующие операторы мутации (ОМ) [2, 4-5]:

- узловая мутация;
- усекающая мутация;
- растущая мутация.

Узловой оператор мутации выполняется следующим образом:

- выбирается случайным образом узел, подлежащий мутации;
- определяется тип выбранного узла (функциональный или терминальный);
- случайно выбирается из множества, соответствующего типу выбранного узла,

значение узла, отличное от рассматриваемого;

- заменяется исходное значение узла на выбранное.

Пример узлового оператора мутации показан на рис. 5.

Усекающий оператор мутации производится так:

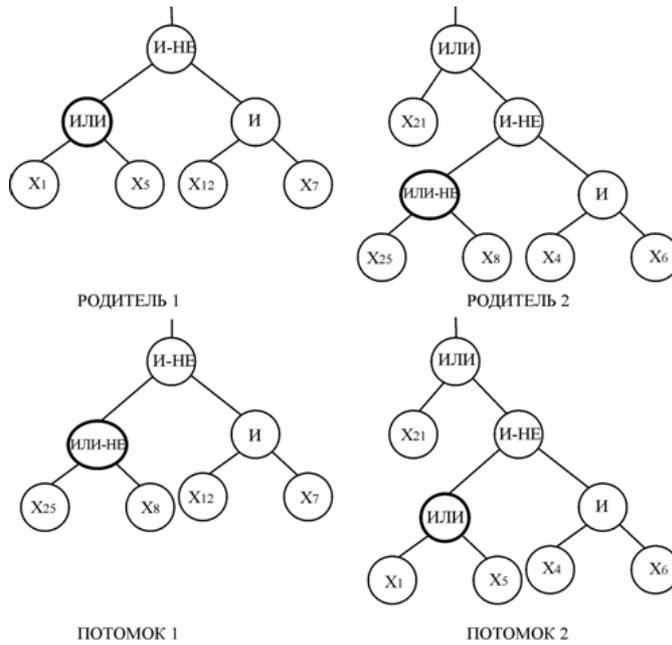


Рис. 4. Пример выполнения ОК поддеревьев

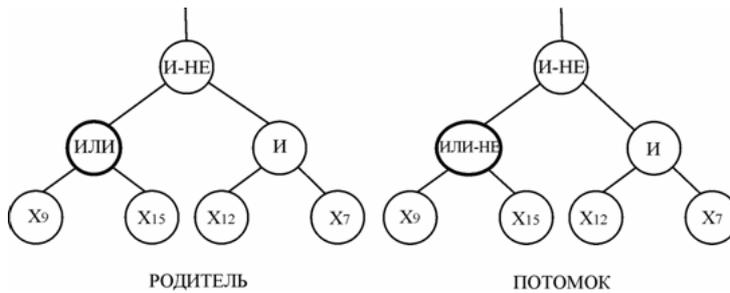


Рис. 5. Пример выполнения узлового ОМ

- случайным образом выбирается узел;
- случайным образом выбирается символ из заданного терминального множества;

- обрезаются ветвь выбранного узла мутации;
- вместо обрезанной ветви ставится терминальный символ.

Пример усекающего оператора мутации показан на рис. 6.

Растущий оператор мутации выполняется следующим образом:

- случайным образом определяется узел мутации;
- если узел не является терминальным, то необходимо отсечь ветви, которые исходят из него, иначе выбрать другой узел;
- вычислить глубину остатка дерева;
- вместо отсеченной ветви дерева вырастить случайным образом новую ветвь

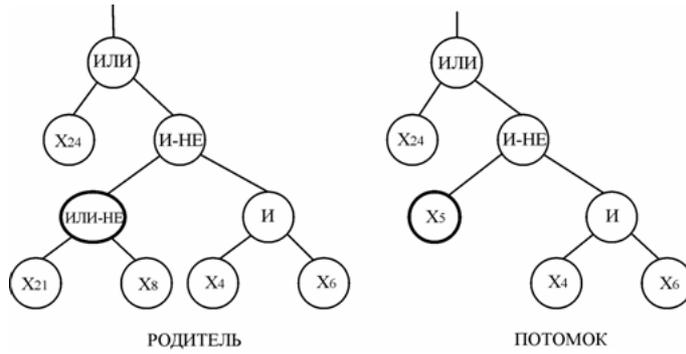


Рис. 6. Пример выполнения усекающего ОМ

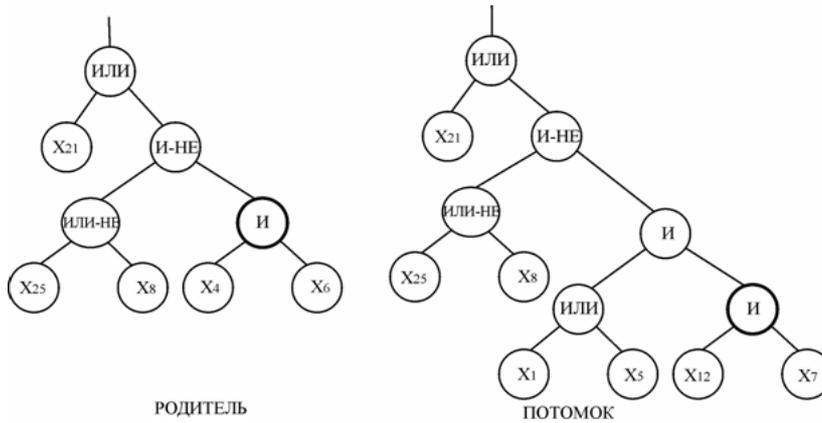


Рис. 7. Пример выполнения растущего ОМ

так, чтобы размер нового построенного дерева не превышал заданный порог.

Пример растущего оператора мутации показан на рис. 7. Это очень мощный оператор, обладающий большими возможностями.

Редукция [2-3]. Оператор редукции выполняется с целью сохранения размера популяции. Типы оператора практически совпадают с типами оператора отбора родителей. Но процедуры редукции и отбора родителей разнесены по действию во времени и имеют разный смысл. Возможно выполнение следующих вариантов редукции:

- элитная стратегия;
- чистая замена;
- равномерная случайная замена (с указанием количества заменяемых особей в процентах).

Критерий останова. В качестве критерия останова можно использовать указание определенного числа итераций или указание определенного числа повторения лучшего результата.

Апробация. Для реализации поставленной задачи написана программа в сре-

Таблица 2. Результаты экспериментов по выбору вероятности ОМ

Вероятность ОМ	Доля правильной классификации					
	Обучающая выборка			Проверочная выборка		
	Узловой	Усекающий	Растущий	Узловой	Усекающий	Растущий
0,025	0,93571	0,95	0,96428	0,86428	0,87142	0,95714
0,05	0,87142	0,95	0,96428	0,89285	0,98571	0,97857
0,075	0,92857	0,96428	0,97142	0,88571	0,97857	0,95
0,1	0,95	0,95	0,96428	0,97857	0,97857	0,97857
0,125	0,94285	0,97142	0,97142	0,88571	0,97857	0,94285
0,15	0,96428	0,96428	0,98571	0,97857	0,97857	0,94285
0,175	0,97142	0,96428	0,96428	0,98571	0,97857	0,97857
0,2	0,96428	0,96428	0,96428	0,97857	0,97857	0,97857
0,225	0,97142	0,96428	0,97142	0,87857	0,97857	0,98571
0,25	0,97142	0,97142	0,96428	0,97142	0,93571	0,97142
0,275	0,96428	0,96428	0,97142	0,97857	0,97857	0,98571
0,3	0,97857	0,96428	0,99285	0,92857	0,98571	0,97142
0,325	0,96428	0,96428	0,98571	0,97857	0,98571	0,99285
0,35	0,97142	0,97857	0,99285	0,98571	0,9	0,97142
0,375	0,96428	0,97857	0,97142	0,97857	0,99285	0,97857
0,4	0,96428	0,96428	0,97142	0,97857	0,97142	0,97142
0,425	0,97857	0,96428	0,98571	0,97142	0,98571	0,91428
0,45	0,97142	0,96428	0,97142	0,91428	0,86428	0,95
0,475	0,97142	0,96428	0,99285	0,98571	0,97857	0,97142
0,5	0,96428	0,96428	0,97142	0,97857	0,97857	0,98571

де C++ Builder 6, которая выполняет рассмотренный алгоритм. Проведены эксперименты с целью определения значений параметров ГП для построения дерева классификации акушерских кровотечений. Например, для каждого значения вероятности ОМ выполнялось несколько экспериментов и выбиралось лучшее значение. Результаты экспериментов представлены в табл. 2.

На рис. 8 и 9 показаны зависимости доли правильной классификации от вероятности и типа ОМ.

Очевидно, что, начиная с вероятности ОМ 0,275, результаты классификации достаточно высокие для усекающего и растущего ОМ. Процент правильной классификации составляет более 96% на обучающей выборке и на проверочной, за некоторым исключением. Поэтому выберем усекающий ОМ и вероятность, равную 0,3. Выбор усекающего ОМ обусловлен лучшей классификацией на проверочной выборке, а также тем, что при данном типе ОМ деревья получаются меньшего размера, что упрощает работу с ними при их интерпретации.

Аналогичным образом подбирались и другие значения ГП. В результате некоторых экспериментов получено дерево, которое на обучающей выборке дает 100% правильной классификации, на проверочной 98,57%. В табл. 3 приведены значения параметров ГП, при которых оно получено.

5. Заключение. Разработанный аппарат ГП создан и протестирован на приме-

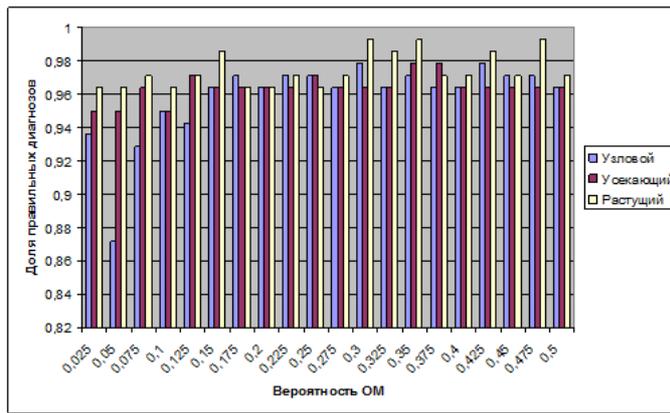


Рис. 8. Зависимость корректности акушерских кровотечений от вероятности и типа ОМ на обучающей выборке

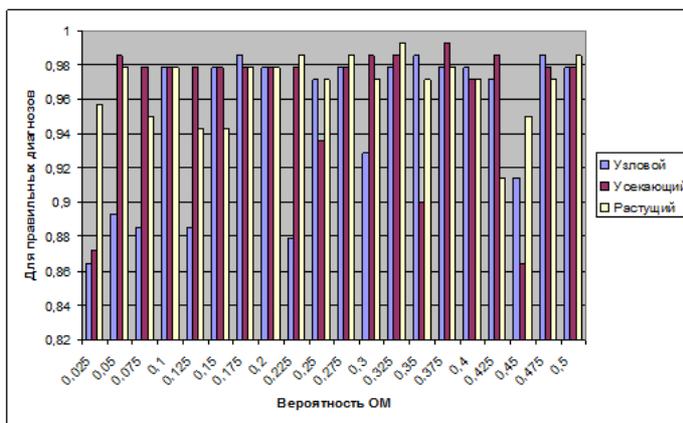


Рис. 9. Зависимость корректности классификации акушерских кровотечений от вероятности и типа ОМ на проверочной выборке

ре определения риска развития патологической потери крови при родах, но может быть использован и при решении других задач медицинской диагностики и прогнозирования.

1. Радзинский В.Е. Акушерский риск. Максимум информации минимум опасности для матери и младенца / В.Е. Радзинский, С.А. Князев, И.Н. Костин. – Изд.: Эксмо. – 2009. – С. 285.
2. Скобцов Ю.О. Основы эволюционных обчислень / Скобцов Ю.О. – Донецьк: ДонНТУ, 2009. – 316 с.
3. Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы / Курейчик В.М. // Известия академии наук. Теория и системы управления. – 1999. – № 1. – С. 144-160.
4. Banzhaf W. Genetic Programming – an Introduction / Banzhaf W. et al. – Morgan Kaufman, Heidelberg; San-Francisco, 1998.
5. Koza J.R. Genetic Programming / Koza J.R. – Cambridge, MA MIT Press, 1998. – 609 с.

Таблица 3. Набор параметров ГП, при котором получено дерево для классификации

Параметр	Значения
Мощность популяции	150
Максимальная глубина особи	10
Отбор родителей (селекция)	Рулетка
Инициализация начальной популяции	Растущая
Редукция	Элитная стратегия
Вероятность кроссинговера	0,85
Вероятность мутации	0,30
Кроссинговер	Смешанный
Мутация	Усекающая
Количество итераций	200

T. A. Vasyaeva, S. V. Hmelevoy, D. E. Ivanov

Application of genetic programming to identify high-risk pathological blood loss at delivery.

A solution of the problem of determining the actual risk of pathological obstetric haemorrhage is proposed. The application of genetic programming allows performing the classification to the abnormal bleeding and valid one. A modification of the coding method of individuals for genetic programming is proposed. The testing on real medical data is performed.

Keywords: *genetic programming, classification, coding.*

T. O. Васяєва, С. В. Хмелевой, Д. Є. Іванов

Застосування генетичного програмування для визначення високого ризику патологічної втрати крові при пологах.

У даній роботі запропоновано вирішення актуальної задачі визначення ризику виникнення патологічної акушерської кровотечі. Застосування генетичного програмування дозволяє виконувати класифікацію на патологічну і допустиму кровотечу. Запропоновано модифікацію способу кодування особин для генетичного програмування. Виконано тестування на реальних медичних даних.

Ключові слова: *генетичне програмування, класифікація, кодування.*

Донецкий национальный технический ун-т
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 05.12.11

vasyaeva@gmail.com
hmelevoy@cs.donntu.edu.ua
ivanov@iamm.ac.donetsk.ua

УДК 517

©2011. И. В. Горохова, Н. А. Роженко

ДЕЙСТВИЕ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ НА МАЛЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ НА КОНЦЕ

Рассмотрена спектральная задача, связанная с описанием малых поперечных колебаний упругого стержня с сосредоточенной массой на конце под действием вязкого трения. Левый конец стержня закреплен жестко без трения. Правый конец несет сосредоточенную массу. Описано расположение спектра такой задачи и получена асимптотическая формула для собственных значений.

Ключевые слова: собственные значения, операторный пучок, краевые условия.

1. Введение. Одной из наиболее ранних, досконально исследованных задач на собственные значения является рассмотренная Леонардом Эйлером в 1744 году проблема определения критической нагрузки для гибкого стержня, работающего на сжатие и подверженного опасности потери устойчивости. В XIX веке при построении классической математической физики возникли многочисленные задачи на собственные значения для колебаний (см. например, [1], [2], [3]). В 70-80 г.г. прошлого века появляется необходимость в рассмотрении новых начально-краевых спектральных задач, содержащих спектральный параметр не только в уравнениях, но и в граничных условиях. Кроме того, особый интерес представляет влияние вязкого трения на различные изучаемые физические объекты ([4], [5]).

Далее будет представлена задача о поперечных колебаниях стержня, который находится под действием вязкого трения. Стержни являются наиболее часто применяемыми расчетными схематизациями при рассмотрении поперечных колебаний судовых конструкций. Ими моделируются балки судового набора, валы, мачты, пиллерсы, кронштейны и целый ряд других конструкций. Основными целями расчетов поперечных колебаний стержней являются: определение спектра собственных частот и соответствующих им форм колебаний и определение параметров вынужденных колебаний под действием заданной системы возмущающих сил.

Малые поперечные колебания упругого однородного стержня плотности $\rho = 1$, растянутого распределённой силой, пропорциональной $g(x) \geq 0$, $g \in C^1[0, l]$, находящегося под действием однородного вязкого трения, коэффициент которого $k > 0$, описываются уравнением

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь x – координата, измеряемая от левого конца стержня, t – время, $u(x, t)$ – поперечное смещение точки стержня, находящейся на расстоянии x от левого конца в момент времени t . Левый конец стержня закреплен жестко без трения. На правом конце находится массивное кольцо массы $m > 0$, которое может двигаться по верти-

кали с вязким трением в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Жесткое закрепление левого конца описывается краевыми условиями (2)-(3)

$$u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (3)$$

Краевые условия на правом конце имеют следующий вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=l} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} + g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=l} = 0, \quad (5)$$

где $l > 0$ – длина стержня, $\beta > 0$ – коэффициент вязкого трения (демпфирования) кольца. Условие (4) означает, что стержень соединен с кольцом шарнирно, а условие (5) означает, что кольцо движется вдоль вертикали с вязким трением. Различные виды краевых условий в отсутствие демпфирования рассмотрены в [6]. Условие (5) является физически наиболее оправданным (см. например, [6], [7], [8], [9]). Отметим, что результаты, близкие к полученным в настоящей статье, для другого краевого условия на правом конце имеются в работе [10], на левом – в [11]. После стандартного преобразования $u(x, t) = e^{i\lambda t} y(\lambda, x)$ получаем спектральную задачу

$$y^{(4)} - \lambda^2 y - (gy')' + ik\lambda y = 0, \quad (6)$$

$$y(\lambda, 0) = 0, \quad (7)$$

$$y^{(1)}(\lambda, 0) = 0, \quad (8)$$

$$y^{(2)}(\lambda, l) = 0, \quad (9)$$

$$-y^{(3)}(l) - m\lambda^2 y(l) + g(l)y'(l) + i\lambda\beta y(l) = 0. \quad (10)$$

2. Теоретико-операторная трактовка задачи. В данной работе мы используем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество значений λ , для которых обратный оператор $L(\lambda)^{-1}$ существует как ограниченный замкнутый, называется резольвентным множеством, а дополнение к нему – спектром пучка $L(\lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением ([12], с. 61) пучка $L(\lambda)$, если существует вектор $y_0 \in D(A)$ (называемый собственным вектором) такой, что $y_0 \neq 0$ и $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Векторы y_1, \dots, y_{p-1} называются цепочкой присоединенных к y_0 векторов, если

$$\sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} \frac{d^s L(\lambda)}{d\lambda^s} \Big|_{\lambda=\lambda_0} y_{k-s} = 0, \quad k = \overline{1, p-1}.$$

Число p называется длиной цепочки из собственного и присоединенных векторов. Геометрической кратностью собственного значения называется число соответствующих линейно независимых собственных векторов. Алгебраической кратностью собственного значения называется максимальное значение суммы длин цепочек, соответствующих линейно независимым собственным векторам. Собственное значение называется изолированным, если некоторая его выколота окрестность принадлежит резольвентному множеству. Изолированное собственное значение λ_0 конечной алгебраической кратности называется нормальным, если образ $\text{Im}L(\lambda_0)$ замкнут.

Рассмотрим теоретико-операторную трактовку этой задачи. Для этого введём операторы, действующие в гильбертовом пространстве $L_2(0, l) \oplus \mathbb{C}$ согласно следующим формулам:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y(x) \\ c \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y(x) \in W_2^4(0, l), \\ c = y(l), \quad y(0) = y^{(1)}(0) = 0, \quad y^{(2)}(l) = 0 \end{array} \right\},$$

$$A \begin{pmatrix} y(x) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(4)} \\ -y^{(3)}(l) \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(gy')' \\ g(l)y'(l) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим операторный пучок

$$L(\lambda) = (A - \lambda^2 M + G + i\lambda K)$$

с областью определения $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(A)$. Эта область определения не зависит от спектрального параметра λ по определению. Естественно считать, что спектр пучка $L(\lambda)$ является спектром нашей задачи, поскольку, расписав уравнение $L(\lambda)Y = 0$ покомпонентно, получим (6) и (10), а условия (7)-(8) входят в описание $\mathcal{D}(A)$. Коэффициенты этой задачи являются целыми функциями спектрального параметра λ . Поэтому (см. [12], с. 27) спектр этой краевой задачи и пучка L состоит из нормальных собственных значений, которые сгущаются только к бесконечности.

Лемма 1. *Оператор A самосопряженный и неотрицательный.*

Доказательство. Пусть $Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y(l) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$, а $Z = \begin{pmatrix} z(x) \\ z(l) \end{pmatrix}$, где $z(x) \in W_2^4(0, l)$, тогда, учитывая, что $y(0) = 0$, $y^{(1)}(0) = 0$, и интегрируя по частям дважды, получаем

$$(AY, Z) = \int_0^l y^{(4)}(x)\bar{z}(x) dx - y^{(3)}(l)\bar{z}(l) = \tag{11}$$

$$= -y^{(3)}(0)\bar{z}(0) + y'(l)\bar{z}^{(2)}(l) + y^{(2)}(0)\bar{z}^{(1)}(0) - y(l)\bar{z}^{(3)}(l) + \int_0^l y\bar{z}^{(4)} dx.$$

Отсюда видно, что, если мы положим

$$z(0) = z^{(1)}(0) = z^{(2)}(l) = 0, \quad (12)$$

то $(AY, Z) = (Y, AZ)$ и $D(A^*) = D(A)$. Покажем, что оператор A неотрицателен. Для этого рассмотрим скалярное произведение (AY, Y) . Полагая в (11) $Z = Y$ и учитывая условия (12), получим

$$(AY, Y) = \int_0^l |y^{(2)}|^2 dx \geq 0.$$

Откуда видно, что оператор A является неотрицательным. \square

Лемма 2. *Оператор G симметричный и неотрицательный.*

Доказательство. Пусть $Y \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(G)$, $Z \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(G)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (GY, Z) &= - \int_0^l (g(x)y')' \bar{z}(x) dx + g(l)\bar{z}(l)y'(l) = \\ &= \int_0^l gy' \bar{z}' dx = g(l)\bar{z}'(l)y(l) - \int_0^l (g\bar{z}')' y dx = (Y, GZ). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, оператор G симметричный. Покажем, что на области $D(G) = D(A)$ оператор G неотрицательный. Для этого рассмотрим скалярное произведение (GY, Y) . Из формулы (13) следует, что

$$(GY, Y) = \int_0^l g(x)|y'|^2 dx \geq 0.$$

\square

Предложение. Спектр пучка $L(\lambda)$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости.

Этот результат следует из [13] для пучка ограниченных операторов, но доказательство остается справедливым и для случая пучка неограниченных операторов (см., например, [14]).

3. Асимптотика собственных значений. Найдем асимптотику собственных значений задачи (6)-(10). Положим, что $g = const > 0$. Прямое вычисление показывает, что:

$$y_3(\lambda, x) = \frac{\text{ch}(z_2 x)}{(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{\text{ch}(z_1 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)}, \quad (14)$$

$$y_4(\lambda, x) = \frac{\text{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{\text{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)}, \quad (15)$$

где

$$z_1 = \sqrt{\lambda} \left(1 + \frac{g}{4\lambda} - \frac{ik}{4\lambda} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (16)$$

$$z_2 = i\sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{g}{4\lambda} - \frac{ik}{4\lambda} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (17)$$

Решение уравнения (6), которое удовлетворяет условиям (7), (8), (9), имеет вид

$$y = y_3^{(2)}(\lambda, l) \cdot y_4(\lambda, x) - y_4^{(2)}(\lambda, l) \cdot y_3(\lambda, x).$$

Подставляя его в краевое условие (10), получаем уравнение

$$y_3^{(2)}(\lambda, l) \cdot (-y_4^{(3)}(\lambda, l) - m\lambda^2 y_4(\lambda, l) + g y_4^{(1)}(\lambda, l) + i\lambda \beta y_4(\lambda, l)) - \\ - y_4^{(2)}(\lambda, l) \cdot (-y_3^{(3)}(\lambda, l) - m\lambda^2 y_3(\lambda, l) + g y_3^{(1)}(\lambda, l) + i\lambda \beta y_3(\lambda, l)) = 0,$$

или с учетом (14), (15), (16) и (17)

$$\begin{aligned} & \frac{gz_2^2 (\operatorname{ch}(z_2 l))^2}{(z_2^2 - z_1^2)^2} + \frac{gz_1^2 (\operatorname{ch}(z_1 l))^2}{(z_2^2 - z_1^2)^2} + \frac{m\lambda^2 z_2^2 \operatorname{ch}(z_2 l) \operatorname{sh}(z_1 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2 z_1} + \\ & + \frac{m\lambda^2 z_1^2 \operatorname{ch}(z_1 l) \operatorname{sh}(z_2 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2 z_2} - \frac{i\lambda \beta z_2^2 \operatorname{ch}(z_2 l) \operatorname{sh}(z_1 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2 z_1} + \frac{z_2^4 (\operatorname{sh}(z_2 l))^2}{(z_2^2 - z_1^2)^2} + \\ & + \frac{i\lambda \beta z_2 \operatorname{sh}(z_2 l) \operatorname{ch}(z_1 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} + 2 \frac{z_2^2 \operatorname{ch}(z_2 l) z_1^2 \operatorname{ch}(z_1 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \frac{z_1^4 (\operatorname{ch}(z_1 l))^2}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \\ & - \frac{z_2^4 (\operatorname{ch}(z_2 l))^2}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \frac{gz_2^2 \operatorname{ch}(z_2 l) \operatorname{ch}(z_1 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \frac{gz_1^2 \operatorname{ch}(z_1 l) \operatorname{ch}(z_2 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \\ & - \frac{z_2 \operatorname{sh}(z_2 l) z_1^3 \operatorname{sh}(z_1 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} + \frac{z_1^4 (\operatorname{sh}(z_1 l))^2}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \frac{z_1 \operatorname{sh}(z_1 l) z_2^3 \operatorname{sh}(z_2 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \\ & - \frac{m\lambda^2 z_2 \operatorname{sh}(z_2 l) \operatorname{ch}(z_1 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \frac{m\lambda^2 z_1 \operatorname{sh}(z_1 l) \operatorname{ch}(z_2 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \\ & - \frac{gz_2^2 (\operatorname{sh}(z_2 l))^2}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \frac{gz_1^2 (\operatorname{sh}(z_1 l))^2}{(z_2^2 - z_1^2)^2} + \frac{i\lambda \beta z_1 \operatorname{sh}(z_1 l) \operatorname{ch}(z_2 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} - \\ & - \frac{i\lambda \beta z_1^2 \operatorname{ch}(z_1 l) \operatorname{sh}(z_2 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2 z_2} + 2 \frac{gz_2 \operatorname{sh}(z_2 l) z_1 \operatorname{sh}(z_1 l)}{(z_2^2 - z_1^2)^2} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Найдем асимптотику корней уравнения (18). Для этого подставим в него:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} + A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \quad (19)$$

Тогда, приравнявая нулю коэффициенты перед степенями $1/n$ в (19), получим:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{\pi^2 n}{2l^2} + \frac{\pi^2}{16l^2} + \frac{ik}{2} + \frac{g}{2} + \frac{1}{lm} - \frac{1}{2\pi nm^2} -$$

$$- \frac{g}{2\pi n} + \frac{1}{8\pi n^2 m^2} + \frac{g}{8\pi n^2} - \frac{1}{4\pi^2 m^2 n^2} + \frac{lg}{2\pi^2 mn^2} - \frac{l^2 g^2}{8\pi^2 n^2} - \frac{l^2 k^2}{8\pi^2 n^2} +$$

$$+ \frac{l}{6\pi^2 m^3 n^2} - \frac{il}{\pi^2 n^2} \left(\frac{kg}{4} + \frac{\beta}{m^2} + \frac{k}{m} \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (20)$$

4. Выводы. В представленной работе исследована задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого стержня с грузом на конце, находящегося под влиянием вязкого трения. Описана теоретико-операторная трактовка этой задачи. Доказано, что оператор A самосопряженный, неотрицательный и оператор G симметричен. Показано, что спектр пучка $L(\lambda)$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Из формулы (20) видно, что по спектру задачи последовательно можно найти параметры задачи l, k, g, m, β , т.е. решить обратную задачу для $g = const$.

1. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. – [2-е изд.]. – М.-Л.: ОНТИ ГТТИ, вып. 1. – 1934. – 172 с.
2. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. – М.-Л.: ОГИЗ, 1946. – 532 с.
3. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
4. *Griniв R.O., Shkalikov A.A.* On Operator Pencils Arising in the Problem of Beam Oscillations with Internal Damping // *Matematicheskie Zametki*. – 1994. – V. 56, № 2. – P. 114-131.
5. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости // *Труды СПб матем. общества*. – 1998. – С. 3-33.
6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1968. – 503 с.
7. *Amara J.B.* Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions // *Functional Analysis and its Applications V.Kadets and W.Zelazko. North-Holland Mathematics Studies*. – 2004. – 197. – P. 49-58.
8. *Takemura Kazuo, Kametaka Yochinori, Nagai Atsushi, N.D. Kopachevsky* Positivity and hierarchical structure of Green functions for bending of a beam: boundary value problems with boundary conditions of not simple type // *Far East J.Math. Sci.* – 2007. – V. 25, № 12. – P. 201-230.
9. *Яковлев А.В.* Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня с грузом на конце // *Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского*. – 2006. – Т. 2, № 15 (54). – С. 105-114.
10. *Möller M., Pivovarchik V.* Spectral Properties of a Fourth Order Differential Equation // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications. European Mathematical Society*. V. – 2006. – 25. – P. 341-366.
11. *Gorokhova I.V.* Small transversal vibrations of elastic rod with point mass at one end subject to viscous friction // *Журн.матем.физ.,анал.,геом.* – 2009. – 5:4. – P. 375-385.
12. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
13. *Krein M.G., Langer H.* On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua I, II // *Integral Equations Operator Theory*. – 1978. – V. 3. – P. 364-399, P. 539-566.
14. *V.N. Pivovarchik* On spectra of a certain class of quadratic operator pencils with onedimensional linear part // *Укр. матем. ж.* – 2007. – Т. 59. – С. 702-715.

I. V. Gorokhova, N. A. Rozhenko

Action of the viscous friction on small transversal vibrations of the rod with one loaded end.

A spectral problem describing small transversal vibrations of an elastic rod with a concentrated mass (bead) at the right end under viscous friction is considered. The left end is hinge joined. Location of the spectrum of such a problem is described and asymptotic formula of the eigenvalues is provided.

Keywords: *eigenvalues, operator pencil, boundary conditions.*

И. В. Горохова, Н. О. Роженко

Дія в'язкого тертя на малі поперечні коливання пружного стержня з зосередженою масою на кінці.

Розглянуто спектральну задачу, пов'язану з описом малих поперечних коливань пружного стержня з зосередженою масою на кінці під дією в'язкого тертя. Лівий кінець стержня закріплений жорстко без тертя. Правий кінець несе зосереджену масу. Описано розташування спектра такої задачі та отримано асимптотичну формулу на власні значення.

Ключові слова: *власні значення, операторний пучок, крайові умови.*

Южноукраинский национальный педагогический
ун-т им. К.Д. Ушинского, Одесса
Одесский национальный ун-т им. И.И. Мечникова
e-mail-i.gorochova@rambler.ru
e-mail-mainatasha@mail.ru

Получено 20.09.11

УДК 539.3

©2011. С. М. Гребенюк, В. З. Юречко

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ІЗ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ В УМОВАХ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Розроблено методику чисельного аналізу напружено-деформованого стану конструкцій із пористого матеріалу в умовах в'язкопружного деформування на основі моментної схеми скінченного елемента з використанням різних методів визначення модулів пружності ізотропних пористих матеріалів, виведено співвідношення для урахування в'язкопружної поведінки пористого матеріалу. Проведено розрахунок порожнистого циліндра із пористого матеріалу.

Ключові слова: відносна щільність, пористі матеріали, метод скінчених елементів.

1. Вступ. Однією з важливих задач механіки деформівного твердого тіла на сучасному етапі є необхідність вдосконалення математичних моделей різних середовищ, зокрема пористих середовищ. Це зумовлено широким впровадженням пористих матеріалів у різні галузі науки і техніки України, серед яких машинобудування, будівництво, автомобілебудування, авіабудування, зокрема це круглі і прямокутні пластини (діафрагми, затвори печей, перекирвальні клапани), пористі вкладиші підшипників ковзання (порожнистий циліндр), пористі втулки та інші. Одним зі стимулюючих факторів цього є те, що при створенні пористих матеріалів можливо впливати на властивості отриманого матеріалу, варіюючи його пористість, розміри та форми пор.

У реальних умовах експлуатації пористі матеріали зазнають теплового та механічного навантаження. У зв'язку з цим виникає необхідність дослідження напружено-деформованого стану (НДС) пористого матеріалу. Проблема руйнування пористих матеріалів при в'язкопружному деформуванні, а також недостатня його міцність, може бути досить успішно вирішена при розробці надійних методів розрахунків на міцність, дозволяє заздалегідь визначити характеристики НДС таких матеріалів.

При дослідженні НДС в умовах в'язкопружної поведінки пористих матеріалів важливим є вибір необхідної теорії, що характеризує залежність пружних сталих пористих матеріалів від пористості P та пружних сталих матриці матеріалу. Для моделювання пружних характеристик пористих псевдосплавів у роботі [10] був використаний метод елементарної комірки, який давав прийнятні результати при дослідженні пористих металів. Розбиття елементарної комірки на структурні елементи, що представляють собою компактні області однієї фази, проводились у рамках адіабатичного та ізотермічного наближень. У роботі [6] модулі пружності ізотропного пористого матеріалу для випадкового просторового розподілення пор визначаються за допомогою варіаційного методу Хашина-Штрікмана. Для отримання пружних сталих пористого матеріалу, використовувався найбільш обґрунтований метод роз-

рахунку модулів пружності ізотропних пористих матеріалів, а саме метод самоузгодження, який виражає залежність модуля об'ємного стиску K та модуля зсуву G пористих матеріалів від їх відносної щільності ρ [6]. У цьому методі розглядаються пори сферичної, голкоподібної та дискової форми. Для пор сферичної форми

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \alpha_0 \rho}; \quad \frac{G}{G_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \beta_0 \rho}, \quad (1)$$

де $\alpha_0 = \frac{1 + \nu_0}{3(1 - \nu_0)}$; $\beta_0 = \frac{2(4 - 5\nu_0)}{15(1 - \nu_0)}$; K , G , K_0 , G_0 – модулі об'ємного стиску та зсуву пористого матеріалу і матриці, відповідно; ν_0 – коефіцієнт Пуассона матриці.

Для випадкового просторового розподілення пор

$$\frac{K}{K_0} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} p\right)^{-1}; \quad \frac{G}{G_0} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} q\right)^{-1}. \quad (2)$$

Для пор голкоподібної форми

$$p = \frac{5 - 4\nu_0}{3(1 - 2\nu_0)}; \quad q = \frac{8}{15}(5 - 3\nu_0). \quad (3)$$

Для пор дискової форми

$$p = \frac{4}{3} \frac{1 - \nu_0^2}{(1 - 2\nu_0)} \frac{1}{\pi l}; \quad q = \frac{8}{15} \frac{(1 - \nu_0)(5 - \nu_0)}{(2 - \nu_0)} \frac{1}{\pi l}, \quad (4)$$

де $l = \frac{t}{d}$, t – товщина; d – діаметр пори.

Аналітичний розрахунок конструкцій із пористих матеріалів є дуже складною процедурою, тому велике значення набуває використання чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів (МСЕ), які дозволяють враховувати відмінні риси таких матеріалів.

Дослідженню НДС в умовах в'язкопружної поведінки пористих матеріалів присвячено велику кількість робіт. У роботі [1] описані способи застосування проекційно-сіткових методів, зокрема МСЕ, розв'язання еволюційної задачі пружнов'язкопластичності. Наведено алгоритми розв'язання такої задачі з урахуванням скінченності деформацій, нелінійної залежності структурно-реологічних характеристик керамічної маси від пористості і напруженого стану. Співвідношення МСЕ були отримані на основі інтегральної постановки задачі відповідно до варіаційної форми методу Гальоркіна. У результаті просторової дискретизації на основі МСЕ отримано напівдискретну форму рівнянь рівноваги в згорнутому вигляді.

У роботі [2] за допомогою моделювання, заснованому на скінченноелементному аналізі процесу напрусування пористої втулки на компактний вал, визначено градієнти залишкових напружень, що виникають у пористій втулці і валу при утворенні з'єднання з натягом. Встановлено залежності ступеня пластичної та пружної деформації від пористості втулок, що напрусовуються, величини натягу, матеріалу і товщини стінки зразка. Збільшення натягу і зменшення товщини стінки втулки

призводить до зростання пластичних деформацій по зовнішньому і внутрішньому діаметрам, при всіх значеннях пористості.

Робота [4] присвячена вивченню процесів пресування деревини, що проводиться у рамках механіки гетерофазних систем з використанням методу усереднення для середовищ із неперервною неоднорідністю. Досліджено процес в'язкопружного деформування при пресуванні ненасиченого капілярно-пористого анізотропного середовища з урахуванням зовнішнього тертя.

2. Побудова скінченноелементної моделі в'язкопружного пористого матеріалу. Для чисельного визначення НДС конструкцій із пористих матеріалів в умовах в'язкопружного деформування, наведемо рівняння тривимірної теорії в'язкопружності та співвідношення МСЕ у тензорній формі, прийнятій згідно роботи [5].

Компоненти тензора напружень для пружного пористого тіла визначаються на основі узагальненого закону Гука

$$\sigma^{ij} = 2G \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \theta \right) + K g^{ij} \theta,$$

де K – модуль об'ємного стиску і G – модуль зсуву пористого матеріалу, які в свою чергу виражаються через модулі K_0 і G_0 матеріалу матриці та відносну щільність ρ згідно формул (1)-(4), $\theta = \varepsilon_{ij}$ – функція об'ємного стиску, g^{ij} – компоненти метричного тензора.

В'язкопружні властивості пористих матеріалів описуються визначальними рівняннями спадкового типу, в яких зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій має залежність від часу. Ґрунтуючись на принципі суперпозиції Л. Больцмана, інтегральні рівняння лінійної в'язкопружності за допомогою спадкової теорії Больцмана-Вольтерра запишуться у вигляді

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau \right),$$

де C^{ijkl} – тензор пружних сталих пористого матеріалу, $R(t - \tau)$ – різницеве ядро релаксації пористого матеріалу.

У припущенні, що реологічні властивості проявляє лише модуль зсуву G , а релаксація модуля об'ємного стиску K відсутня, рівняння лінійної в'язкопружності для пористого матеріалу запишемо наступним чином:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = 2\tilde{G} \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t) \right) + K g^{ij} \theta(t), \quad (5)$$

де \tilde{G} – релаксуючий модуль зсуву пористого матеріалу, який представляється лінійним інтегральним оператором виду

$$\tilde{G}(\varphi) = G \left(\varphi(t) - \int_0^t R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right). \quad (6)$$

Підставивши співвідношення (6) у вираз (5), отримаємо залежність між компонентами тензора напружень і компонентами тензора деформацій для в'язкопружного пористого матеріалу

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij}(t) = & K g^{ij} \theta(t) + 2G \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(t) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(t) - \right. \\ & \left. - \int_0^t R(t-\tau) \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}(\tau) - \frac{1}{3} g^{ij} \theta(\tau) \right) d\tau \right). \end{aligned}$$

При описі в'язкопружних властивостей пористих матеріалів в якості різницевих ядер релаксації використовуються ядра, які отримали гарне підтвердження на практиці в ході експериментів і реологічні параметри яких визначені для широкого класу матеріалів. Використаємо в якості ядра релаксації пористого матеріалу різницево-експоненціальне ядро, яке використовується В.Л. Нарусбергом та Г.А. Тетерсом [9], що має наступний вигляд

$$R(t-\tau) = \frac{C_{ijkl}^0 - C_{ijkl}^\infty}{C_{ijkl}^0} e^{-(t-\tau)}, \quad (7)$$

Припускаючи релаксацію лише модуля зсуву G пористого матеріалу, з урахуванням виразів (6) та (7), маємо наступний вираз

$$\tilde{G} = G^0 \left(\varphi(t) - \int_0^t \frac{G^0 - G^\infty}{G^0} e^{-(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau \right),$$

де G^0 і G^∞ – миттєвий та тривалий модуль зсуву пористого матеріалу, відповідно.

Стандартний метод скінчених елементів у формі методу переміщень не дозволяє враховувати жорсткі зміщення скінченного елемента (СЕ) і іншу негативну властивість матриці жорсткості, пов'язану з появою фіктивних зсувних деформацій, — «ефект хибного зсуву». Щоб усунути перераховані недоліки скористаємося моментною схемою скінченного елемента (МССЕ) [3], яка полягає у введенні потрійний апроксимації: полів переміщень, компонентів деформацій та функції зміни об'єму.

Варіація енергії в'язкопружної деформації СЕ має наступний вигляд:

$$\delta W = \iiint_v \left(2\tilde{G} \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta \theta \right) + K \theta \delta \theta \right) dv.$$

Апроксимацію переміщень представимо для СЕ у вигляді

$$\begin{aligned} U_{s'} = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_{s'}^{(pqr)} \psi_{s'}^{(pqr)} = & \omega_{s'}^{(000)} + \omega_{s'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{s'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{s'}^{(110)} \psi^{(110)} + \\ & + \omega_{s'}^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_{s'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{s'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{s'}^{(111)} \psi^{(111)}, \end{aligned}$$

де $\omega_{s'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу; $\psi^{(pqr)} = \frac{(x_1)^p (x_2)^q (x_3)^r}{p! q! r!}$ – набір степеневих координатних функцій.

Апроксимація компонент тензора деформацій ε_{ij} [3]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= e_{11}^{000} + e_{11}^{010} \psi^{010} + e_{11}^{001} \psi^{001} + e_{11}^{011} \psi^{011}, \\ \varepsilon_{22} &= e_{22}^{000} + e_{22}^{100} \psi^{100} + e_{22}^{001} \psi^{001} + e_{22}^{101} \psi^{101}, \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{000} + e_{33}^{100} \psi^{100} + e_{33}^{010} \psi^{010} + e_{33}^{010} \psi^{010}, \\ \varepsilon_{12} &= e_{12}^{000} + e_{12}^{001} \psi^{001}, \quad \varepsilon_{13} = e_{13}^{000} + e_{13}^{010} \psi^{010}, \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{000} + e_{23}^{100} \psi^{100},\end{aligned}$$

де e_{ij}^{pqr} – коефіцієнти розкладу деформацій.

Функція зміни об'єму [3]

$$\theta = \phi^{(000)},$$

де $\phi^{(\alpha\beta\gamma)}$ – коефіцієнти розкладу функції зміни об'єму θ .

3. Результати розрахунків. Дослідимо збіжність розв'язків отриманих чисельно, при використанні МССЕ, порівнянням їх з аналітичним розв'язком задачі Ляме в умовах в'язкопружного деформування. Задача Ляме є плоскою вісісиметричною задачею, тому будемо розглядати її розв'язок у полярних координатах.

Дослідимо НДС порожнистого циліндра із пористого матеріалу в умовах в'язкопружного деформування, під внутрішнім тиском Q та жорсткому зацмеленні по зовнішньому контуру. Внутрішній радіус дорівнює a , зовнішній – b , r – полярний радіус, t – час. Аналітична залежність радіальних переміщень в умовах в'язкопружної поведінки від пружних модулів K і G пористого матеріалу має наступний вигляд [7]:

$$\tilde{U}(t, r) = f \cdot (1 + \lambda K^*(t - \tau)) \cdot \left(r - \frac{b^2}{r} \right),$$

де

$$f = -\frac{Q}{2K + 2G^0 \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right)}; \quad \lambda = \frac{G^0 \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right)}{K + G^0 \left(\frac{1}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right)};$$

$$K^*(t - \tau) = \int_0^t K(t - \tau) d\tau = \frac{G^0 - G^\infty}{2G^0 - G^\infty} \left(1 - e^{-\frac{2G^0 - G^\infty}{G^0} t} \right),$$

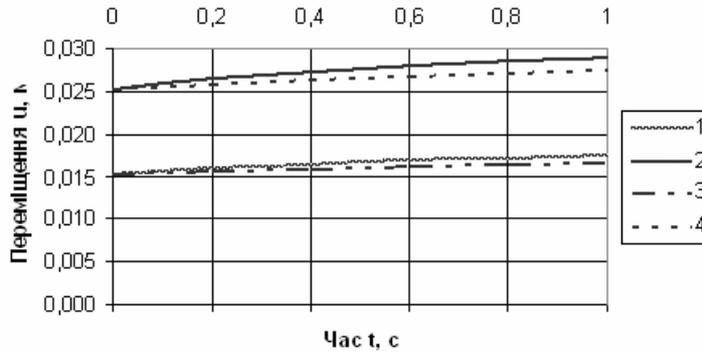
тут $K(t - \tau)$ – різницеве ядро повзучості пористого матеріалу.

Порівняємо переміщення внутрішньої точки циліндра, що отримуються чисельно і аналітично.

Вихідні дані: внутрішній радіус $a = 0,025$ м, зовнішній радіус $b = 0,1$ м, модуль пружності $E = 3,874 \times 10^6$ Па, миттєвий модуль зсуву пористого матеріалу $G^0 = 1,3 \times 10^6$ Па, тривалий модуль зсуву пористого матеріалу $G^\infty = 0,93 \times 10^6$ Па [5], коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,49$, внутрішній тиск $Q = 1,3 \times 10^6$ Па. В рамках методу самоузгодження [6] знаходження пружних сталих K і G пористих матеріалів

вважалося, що пори мають довільне просторове розподілення. Методика розрахунку конструкцій із в'язкопружного пористого матеріалу реалізована в рамках програмного комплексу "МІРЕЛА+" [8].

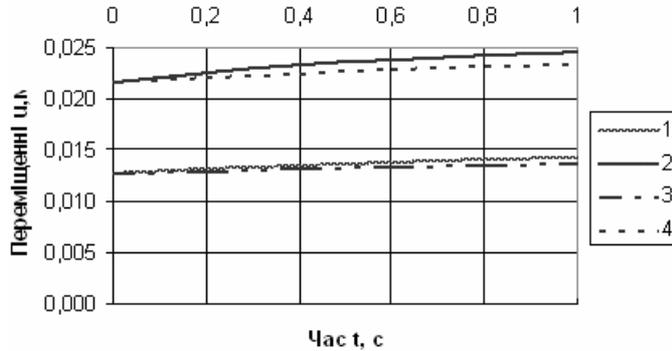
На рис. 1 представлено залежність радіальних переміщень $\tilde{U}(t, r)$ від часу для в'язкопружного пористого матеріалу, пружні модулі K та G якого знаходяться методом самоузгодження для пор сферичної форми та сітки дискретизації $11 \times 11 \times 3$.



1 – аналітичний розв’язок ($P = 0, 2$), 2 – аналітичний розв’язок ($P = 0, 4$),
3 – чисельний розв’язок ($P = 0, 2$), 4 – чисельний розв’язок ($P = 0, 4$)

Рис. 1. Залежність радіальних переміщень від часу, формула (1)

На рис. 2 представлено залежність радіальних переміщень $\tilde{U}(t, r)$ від часу для в'язкопружного пористого матеріалу, пружні модулі K та G якого знаходяться методом самоузгодження для пор голкоподібної форми та сітки дискретизації $11 \times 11 \times 3$.

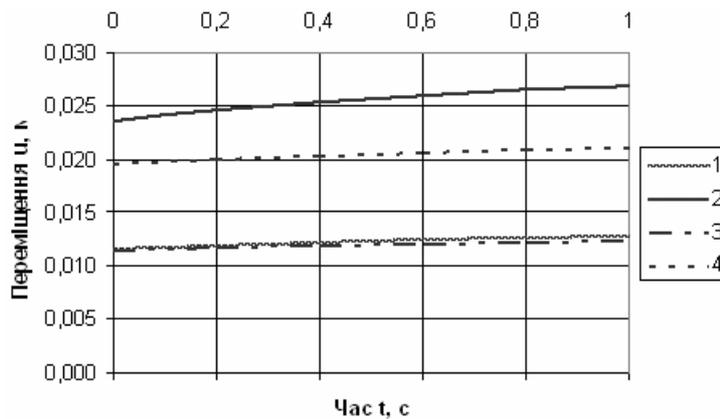


1 – аналітичний розв’язок ($P = 0, 2$), 2 – аналітичний розв’язок ($P = 0, 4$),
3 – чисельний розв’язок ($P = 0, 2$), 4 – чисельний розв’язок ($P = 0, 4$)

Рис. 2. Залежність радіальних переміщень від часу, формули (2)-(3)

На рис. 3 представлено залежність радіальних переміщень $\tilde{U}(t, r)$ від часу для в'язкопружного пористого матеріалу, пружні модулі K та G якого знаходяться методом самоузгодження для пор дискової форми для $l = 0, 125$ та сітки дискретизації

$11 \times 11 \times 3$.



1 – аналітичний розв'язок ($P = 0, 2$), 2 – аналітичний розв'язок ($P = 0, 4$),
 3 – чисельний розв'язок ($P = 0, 2$), 4 – чисельний розв'язок ($P = 0, 4$)

Рис. 3. Залежність радіальних переміщень від часу, формули (2)-(4)

4. Висновки. Аналіз отриманих результатів показує, що при згущенні сітки дискретизації спостерігається стійка збіжність результатів, при сітці $11 \times 11 \times 3$ максимальна похибка методу самоузгодження для пор різних форм при в'язкопружній поведінці пористого матеріалу за одну секунду не перевищує 5,5%.

Таким чином, запропонована матриця жорсткості скінченного елемента на основі моментної схеми дозволяє отримувати адекватні результати при визначенні напружено-деформованого стану конструкцій із пористих матеріалів в умовах в'язкопружного деформування.

1. Абрамов В.І. Напружено-деформований стан стрижневих ізоляторів: [Автореф. дис. канд. техн. наук: 01.02.04] / В.І. Абрамов // Національний технічний ун-т України "Київський політехнічний ін-т". – К., 2000. – 19 с.
2. Бабец А.В. Особенности напряженно-деформированного состояния прессовых соединений с использованием деталей из порошковых материалов / А.В. Бабец, С.А. Дебеева, Д.Б. Волжин, А.С. Яковенко // Изв. вуз. Сев.-Кав. регион. Техн. науки, 2009, № 4. – С. 80-82.
3. Гребенюк С.М. Визначення напружено-деформованого стану конструкцій із пористих матеріалів / С.М. Гребенюк, В.З. Юречко // в зб. наук. праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій". Дн-ськ, 2011, вип. 15. – С. 60-69.
4. Дорняк О.Р. Численное решение краевой задачи вязкоупругого деформирования ортотропного капиллярно-пористого материала при прессовании / О.Р. Дорняк // Вестник ВГУ, Серия: Фізика, Математика, 2005, № 2. – С. 138-146.
5. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров: [моногр.] / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К.: Будівельник, 1992. – 215 с.
6. Ковальченко М.С. Механические свойства изотропных пористых материалов / М.С. Ковальченко // Порошковая металлургия. – 2002. – № 5/6. – С. 105-127.
7. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости: [монография] / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
8. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе "МПРЕЛА+" / [В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др.]. – К.: Наук. думка, 2005. – 416 с.

9. Нарусберг В.Л. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов: [монография] / В.Л. Нарусберг, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1988. – 299 с.
10. Поляков В.В. Модули упругости пористых псевдосплавов / В.В. Поляков, А.В. Егоров, В.А. Турецкий // Известия вузов. Физика. – Барнаул, 2003. – № 3. – С. 119-121.

S. N. Grebenyuk, V. Z. Iurichko

Definition of stress-strain state of hollow cylinders of porous material in a viscoelastic deformation.

We developed a technique of numerical analysis of stress-strain state of the structures of porous materials in the viscoelastic deformation based on the moment scheme of finite element using different methods of determining the elastic modules of isotropic porous materials. Derived relationships to accommodate viscoelastic behavior of porous material. The calculation of a hollow cylinder of porous material is carried out.

Keywords: *relative density, porous materials, finite element method.*

С. Н. Гребенюк, В. З. Юречко

Определение напряженно-деформированного состояния полого цилиндра из пористого материала в условиях вязкоупругого деформирования.

Разработана методика численного анализа напряженно-деформированного состояния конструкций из пористого материала в условиях вязкоупругого деформирования на основе моментной схемы конечного элемента с использованием различных методов определения модулей упругости изотропных пористых материалов, выведены соотношения для учета вязкоупругого поведения пористого материала. Проведен расчет полого цилиндра из пористого материала.

Ключевые слова: *относительная плотность, пористые материалы, метод конечных элементов.*

Запорізький національний ун-т
iurichko@i.ua

Получено 09.11.11

УДК 519.7

©2011. И. С. Грунский, И. И. Максименко

ФИНИТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Вводятся понятия представления, фрагмента и кофрагмента для некоторых специальных алгебраических систем. В терминах специализированных "бэровских" метрик дан критерий финитности представлений. Исследованы алгебраические свойства и условия существования представлений для алгебраических систем двух видов.

Ключевые слова: неструктурированный объект, представление, фрагмент, кофрагмент, алгебраическая система.

1. Введение. Одной из важнейших проблем теории дискретных систем является идентификация объекта (автомата, отмеченного графа, языка) из некоторого класса объектов [1, 2]. В работах [1, 3] был введен и обоснован подход к исследованию контрольных и распознающих экспериментов в классах автоматов Мили на основе их представления специальными окрестностями в метрических пространствах автоматов, распространенный в [4, 5] на произвольные неструктурированные множества дескрипторов.

Целью настоящей статьи является применение синтеза вышеописанных подходов к исследованию алгебраических систем двух специальных видов.

Статья состоит из введения, трех разделов и заключения.

В первом разделе даны основные понятия алгебраических систем специального вида.

Во втором разделе исследована представимость систем первого вида, доказано необходимое условие существования финитных представлений.

В третьем разделе изучен второй вид алгебраических систем. Исследована алгебраическая структура данных систем. Получен метрический критерий существования финитных представлений и описана алгебраическая структура представлений.

2. Основные понятия и определения. Рассмотрим алгебраическую систему вида (\mathbf{A}, \leq, n) , где \mathbf{A} – счетное множество объектов, \leq – предпорядок и задана функция сложности вида $n : \mathbf{A} \rightarrow N^+ \cup \{\infty\}$.

Вне зависимости от задания функции сложности для любых объектов $A, B \in \mathbf{A}$ из соотношения $A \leq B$ вытекает $n(A) \leq n(B)$.

Полагаем, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}_f \cup \mathbf{A}_{in}$, где $\mathbf{A}_f = \{A \in \mathbf{A} | n(A) < \infty\}$ – множество финитных объектов и $\mathbf{A}_{in} = \{A \in \mathbf{A} | n(A) = \infty\}$ – множество инфинитных объектов.

Два объекта A и B эквивалентны ($A \cong B$), если одновременно $A \leq B$ и $B \leq A$. Обозначим через $\cong A$ класс эквивалентности $\{B \in \mathbf{A} | B \cong A\}$. Будем писать $A \not\leq B$ и $A \not\cong B$, если не выполнены соотношения $A \leq B$ и $A \cong B$, соответственно, и $A < B$, если $A \leq B$ и $A \not\cong B$.

Сопоставим каждой алгебраической системе (\mathbf{A}, \leq, n) фактор-систему следующего вида $(\mathbf{A}/\cong, \leq, n)$, полагая что для любых $F, G \subseteq \mathbf{A}$ выполнено соотношение

$F \leq G$ точно тогда, когда для всякого $A \in F$ и $B \in G$ имеет место $A \leq B$ и $n(F) = \sup\{n(A) | A \in F\}$ – сложность множества объектов F . Систему назовем факторизованной, если она совпадает со своей фактор-системой.

Каждому объекту A поставим в соответствие множества фрагментов $Fr(A) = \{B \in \mathbf{A} | B \leq A\}$ и кофрагментов $CoFr(A) = \{B \in \mathbf{A} | B \not\leq A\}$. Обозначим сужения данных множеств на объекты сложности не выше N как $Fr^N(A) = \{B \in Fr(A) | n(B) \leq N\}$ и $CoFr^N(A) = \{B \in CoFr(A) | n(B) \leq N\}$.

В некоторых случаях будем рассматривать разбиение $CoFr(A)$ объекта A на непересекающиеся множества кофрагментов $\{CoFr_\tau(A)\}_\tau$, элементы которых назовем кофрагментами τ -го сорта. Разбиение назовем однородным по кофрагментам, если оно совпадает с самим $CoFr(A)$. Система является однородной по кофрагментам, если разбиения по всем объектам однородны.

Нетрудно видеть, что для любого A выполнено $Fr(A) \cup CoFr(A) = \mathbf{A}$ и $Fr(A) \cap CoFr(A) = \emptyset$.

Введем функции $Fr : 2^{\mathbf{A}} \rightarrow 2^{\mathbf{A}}$ и $CoFr : 2^{\mathbf{A}} \rightarrow 2^{\mathbf{A}}$, полагая $Fr(F) = \bigcup_{A \in F} Fr(A)$ и $CoFr(F) = \bigcup_{A \in F} CoFr(A)$ для любого множества объектов F .

Объект C назовем разделяющим для A и B ($C \in S(A, B)$), если выполнено ($C \leq A$ и $C \not\leq B$) или ($C \not\leq A$ и $C \leq B$).

На множестве объектов зададим "расстояние" между объектами β аналогично "бэровской" метрике [3], полагая $\beta(A, B) = 0$, если $A \cong B$ и $\beta(A, B) = 1/r$, где $r = \inf\{n(C) | C \in S(A, B)\}$ в противном случае. Заметим, что объекты A и B могут быть неэквивалентными, но при этом $\beta(A, B) = 0$. Введем множество предельных объектов для $F \subseteq \mathbf{A}$ как $LimF = \{B \in \mathbf{A} | \inf\{\beta(B, C) | C \in F, C \not\cong B\} = 0\}$.

Система (\mathbf{A}, \leq, n) является финитно делимой, если для любых двух неэквивалентных объектов существует разделяющий их финитный объект.

Кортеж объектов $(A; B_1, \dots, B_r) \in Fr(A_0) \times CoFr^r(A_0)$ назовем представлением ранга r для произвольных $A_0 \in \mathbf{A}$ и $F \subseteq \mathbf{A}$, если для любого $C \in F$ из включения $(A; B_1, \dots, B_r) \in Fr(C) \times CoFr^r(C)$ вытекает $C \cong A_0$. Представление является простым, если $r=1$ и конечным, если величина r конечна.

Прямым представлением назовем кортеж без кофрагментов, а косвенным – кортеж без фрагмента.

Система (\mathbf{A}, \leq, n) является сильно непредставимой, если для всякого объекта $A \in \mathbf{A}$ нет представления относительно A и \mathbf{A} .

Систему (\mathbf{A}, \leq, n) назовем линейно упорядоченной, если \mathbf{A} – линейно упорядочено. Система (\mathbf{A}, \leq, n) всюду плотна, если для любых объектов A, B из $A < B$ вытекает существование такого объекта C , что $A < C < B$.

Отметим, что для всякого объекта A линейно упорядоченного множества \mathbf{A} выполнено равенство $CoFr(A) = \{B \in \mathbf{A} | A < B\}$.

Введем алгебраические системы объектов вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$, где \leq – предпорядок, ∇, Δ – идемпотентные, коммутативные и ассоциативные всюду определенные бинарные операции, $n : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{N}^+ \cup \{\infty\}$ – неубывающая функция сложности, и справедливы следующие аксиомы:

1. для любых двух объектов A и B выполнены соотношения $A \leq A \nabla B$ и $A \Delta B \leq$

A ;

2. для любых объектов $A_1, A_2, B \in \mathbf{A}$ из $A_1 \in Fr(B), A_2 \in Fr(B)$ следует $A_1 \nabla A_2 \in Fr(B)$;

3. для любых объектов $A_1, A_2, B \in \mathbf{A}$ из $A_1 \in CoFr_\tau(B), A_2 \in CoFr_\tau(B)$ вытекает $A_1 \Delta A_2 \in CoFr_\tau(B)$ для любого τ ;

4. для любых двух объектов $A, B \in \mathbf{A}$ полагаем, что $n(A \nabla B) = \max(n(A), n(B))$ и $n(A \Delta B) = \min(n(A), n(B))$.

Назовем алгебраическую систему $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ локально замкнутой, если для всякого $A \in \mathbf{A}$ множества $Fr(A)$ и $CoFr(A)$ замкнуты относительно применения счетного числа операций ∇ и Δ , соответственно.

Для удобства записи дополним носитель системы специальными объектами 0 и 1, для которых выполнены соотношения $0 \nabla A = A$ и $1 \Delta A = A$ для любого A .

Введем операцию \odot над кортежами объектов из \mathbf{A} следующим образом:

$$(A_1; B_1, \dots, B_r) \odot (A_2; C_1, \dots, C_r) = (A_1 \nabla A_2; B_1 \Delta C_1, \dots, B_r \Delta C_r).$$

3. Представимость алгебраических систем вида (\mathbf{A}, \leq, n) . Следующая лемма сводит предпорядок в (\mathbf{A}, \leq, n) к теоретико-множественному включению в множестве $Fr(\mathbf{A})$ и носит вспомогательный характер:

Лемма 1. *Справедливы утверждения:*

1. Для любых объектов A и B равносильны условия:

1.1. $A \leq B$;

1.2. $Fr(A) \subseteq Fr(B)$;

1.3. $CoFr(B) \subseteq CoFr(A)$;

2. Для любых объектов A и B равносильны условия:

2.1. $A \cong B$;

2.2. $Fr(A) = Fr(B)$;

2.3. $CoFr(A) = CoFr(B)$;

3. Для любых объектов A и B равносильны условия:

3.1. $A < B$;

3.2. $Fr(A) \subset Fr(B)$;

3.3. $CoFr(B) \subset CoFr(A)$.

Доказательство.

1. Покажем, что условия 1.1 и 1.2 равносильны. Пусть $A \leq B$ и $C \in Fr(A)$. В этом случае $C \leq A$ и по свойству транзитивности получаем $C \leq B$. Но тогда $C \in Fr(B)$ и выполнено включение $Fr(A) \subseteq Fr(B)$.

Обратно, пусть $Fr(A) \subseteq Fr(B)$. По определению предпорядка $A \in Fr(A)$ и, следовательно, $A \in Fr(B)$, что и означает $A \leq B$. Таким образом доказана равносильность условий 1.1 и 1.2.

Равносильность 1.2 и 1.3 непосредственно следует из соотношений $CoFr(A) = \mathbf{A} - Fr(A)$ и $CoFr(B) = \mathbf{A} - Fr(B)$.

2. Следует из пункта 1 настоящего доказательства, если заметить, что $A \cong B$ точно тогда, когда $A \leq B$ и $B \leq A$.

3. Вытекает непосредственно из пунктов 1 и 2 настоящего доказательства. \square

На множестве $2^{\mathbf{A}}$ вводится операция алгебраического замыкания следующим образом:

Утверждение 2. *Операция $Fr : 2^{\mathbf{A}} \rightarrow 2^{\mathbf{A}}$ является операцией замыкания.*

Доказательство. Покажем, что выполнены условия замыкания.

1. Для любого $F \subseteq \mathbf{A}$ выполнено соотношение $F \subseteq Fr(F)$. Действительно, пусть $C \in F$. Тогда $C \in Fr(C)$ и $Fr(C) \subseteq Fr(F)$. Следовательно, $C \in Fr(F)$.

2. Даны $F_1, F_2 \in \mathbf{A}$ и $F_1 \subseteq F_2$. Покажем, что $Fr(F_1) \subseteq Fr(F_2)$. Действительно, выберем произвольно $C \in Fr(F_1)$. Это значит, что $C \in Fr(D)$ для некоторого $D \in F_1$. Но тогда $Fr(D) \subseteq Fr(F_2)$ и следовательно, $C \in Fr(F_2)$.

3. Покажем, что $Fr(Fr(F)) = Fr(F)$ для любого $F \subseteq \mathbf{A}$. Согласно пункта 1 настоящего доказательства выполнено включение $Fr(F) \subseteq Fr(Fr(F))$. Покажем, что выполнено обратное включение. Выберем произвольно $C \in Fr(Fr(F))$. Тогда существует такое $D \in Fr(F)$, для которого $C \in Fr(D)$. Из соотношения $D \in Fr(F)$ вытекает существование такого $G \in F$, что $D \in Fr(G)$. Но в этом случае $C \in Fr(G)$ и, следовательно, $C \in Fr(F)$. Таким образом, $Fr(Fr(F)) = Fr(F)$ для любого $F \subseteq \mathbf{A}$. \square

Следующее утверждение показывает, что каждый объект с точностью до эквивалентности изоморфен его нижнему конусу с сохранением предпорядка и сложности объекта:

Утверждение 3. *Алгебраические системы $(\mathbf{A}/ \cong, \leq, n)$ и $(Fr(\mathbf{A}), \subseteq, n)$ изоморфны.*

Доказательство. Введем соответствие δ классов эквивалентности $\cong A$ и множеств $Fr(A)$. По условию 2 леммы 1 образы по δ разных классов эквивалентности $\cong A$ и $\cong B$ различны. Таким образом, существует биекция между множествами \mathbf{A}/ \cong и $Fr(\mathbf{A})$.

Кроме того, вводим предпорядок \leq на \mathbf{A}/ \cong полагая, что $\cong A \leq \cong B$ точно тогда, когда $A \leq B$. Согласно пункту 1 леммы 1 в этом случае $\cong A \leq \cong B$ тогда и только тогда, когда $Fr(A) \subseteq Fr(B)$.

Заметим также, что $n(\cong A) = \sup\{n(B) | B \cong A\} = n(A)$ и $n(Fr(A)) = \sup\{n(B) | B \subseteq A\} = n(A)$.

Утверждение 3 доказано. \square

Докажем простую, но полезную в дальнейшем лемму

Лемма 4. *Дана алгебраическая система (\mathbf{A}, \leq, n) .*

1. *Для двух объектов A и B существует разделяющий их объект C тогда и только тогда, когда $A \not\cong B$.*

2. *Для двух объектов A и B существует разделяющий их финитный объект C точно тогда, когда $\beta(A, B) > 0$.*

Доказательство.

1. Покажем от противного. Пусть C – разделяющий объект для эквивалентных объектов A и B . Тогда $C \in Fr(A) \oplus Fr(B)$. Но согласно пункта 2 леммы 1 $Fr(A) = Fr(B)$ и такого объекта не существует.

Обратно, пусть $A \not\cong B$. Тогда по пункту 2 леммы 1 множество $Fr(A) \oplus Fr(B)$ не пусто и любой объект из $Fr(A) \oplus Fr(B)$ будет искомым разделяющим объектом.

2. Пусть C – разделяющий финитный объект для объектов A и B . Тогда $\beta(A, B) \geq 1/n(C) > 0$.

Обратно, пусть $\beta(A, B) > 0$. Тогда существует объект C , разделяющий объекты A и B , причем $n(C) = 1/\beta(A, B)$. Таким образом, объект C финитен. \square

В отличие от утверждения 3 статьи [4], в алгебраических системах (\mathbf{A}, \leq, n) не всегда существует представление относительно любого A и \mathbf{A} . Более того, справедлив следующий критерий сильной непредставимости системы:

Утверждение 5. Пусть дана линейно упорядоченная система (\mathbf{A}, \leq, n) . Система сильно непредставима тогда и только тогда, когда она является всюду плотной.

Доказательство. Пусть дана сильно непредставимая, но не всюду плотная система. Тогда существует такая пара объектов A и B , что $A < B$ и нет такого C , для которого $A < C < B$. Покажем от противного, что пара (A, B) является представлением для A и \mathbf{A} . Предположим, что существует такое $C' \not\cong A$, для которого $A < C' < B$. Но в этом случае система является всюду плотной.

Обратно, пусть дана всюду плотная система. Предположим, что для некоторого $A_0 \in \mathbf{A}$ существует представление вида (A, B) для A_0 и \mathbf{A} . Тогда $A \leq A_0 < B$. В данной системе найдется такой объект C , для которого $A_0 < C < B$. Но тогда (A, B) не является представлением для C и \mathbf{A} . Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение. \square

Теорема 6. Дана финитно разделяемая алгебраическая система (\mathbf{A}, \leq, n) . Если для произвольных $A_0 \in \mathbf{A}$ и $F \subseteq \mathbf{A}$ существует финитное простое представление, тогда $A_0 \notin \lim F$. Обратное утверждение неверно.

Доказательство. Пусть для $A_0 \in \mathbf{A}$ и $F \subseteq \mathbf{A}$ существует финитное простое представление $(A; B_1)$, для которого $n(\{A, B_1\}) \leq N_0$, где N_0 – некоторое натуральное число. Выберем произвольный объект $B \in F$, не эквивалентный A_0 . Если такого объекта нет, то по определению $\lim F$ пусто и условие утверждения выполнено.

В противном случае, пара $(A; B_1)$ разделяет A_0 и любой объект $C \in F$, неэквивалентный A_0 . Очевидно, что $\beta(A_0, C) \geq 1/N_0$. В силу произвольности выбора C делаем вывод, что $A_0 \notin \lim F$.

Обратно, пусть $A_0 \notin \lim F$. Построим пример алгебраической системы, для которой условие $A_0 \notin \lim F$ выполнено, но нет представления для A_0 и F . Рассмотрим множество конечных слов X^* в алфавите X , $|X| \geq 2$. Будем считать, что для слов p, q выполнено соотношение $p \leq q$, если p является префиксом q , а сложность слова положим равным его длине. Зафиксируем некоторое непустое слово p_0 сложности N_0 и класс $F = p_0 * X$, где операция $*$ есть конкатенация слов. Слова из X^* эквивалентны, если они имеют одинаковую запись. Очевидно, что расстояние $\beta(p_0, p') \geq 1/(N_0 + 1)$ для любого $p' \in F$. Следовательно, $p_0 \notin \lim F$.

Покажем теперь, что для p_0 и F нет представлений. Предположим противное. Пусть пара слов (p_1, p_2) есть представление для p_0 и F . Тогда слово p_1 является

префиксом (фрагментом) для p_0 и любого слова из F . Пусть слово p_2 является кофрагментом (т.е. не префиксом) слова p_0 , но является фрагментом некоторого слова из F . Это возможно только в том случае, если слово p_2 совпадает с некоторым словом q из F . Так как алфавит X содержит не менее двух символов, то можно выбрать слово q' из F , для которого слово p_2 не является префиксом. Но тогда слова q' и p_0 должны совпадать, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что не существует представления для p_0 и F . \square

В работах [1, 3] показано, что для классов автоматов Мили подобный метрический критерий является необходимым и достаточным условием. Обобщение этого результата на неструктурированные множества описателей любой природы дано в [4]. Теорема 6 показывает, что для произвольных алгебраических систем с предпорядком критерий справедлив только как необходимое условие.

4. Представимость алгебраических систем вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$. Покажем, что в алгебраических системах вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ имеют место результаты, аналогичные работе [4].

Предварительно докажем вспомогательное утверждение

Утверждение 7. *Дана алгебраическая система $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$.*

Справедливы утверждения:

1. *Для любых $A_1, A_2, B \in \mathbf{A}$ из соотношения $A_1 \not\leq B$ следует, что $A_1 \nabla A_2 \not\leq B$.*
2. *Для любого $A \in \mathbf{A}$ и натурального N множества $\mathbf{A}_f, \mathbf{A}_{in}, Fr(A), CoFr(A), Fr^N(A), CoFr^N(A)$ замкнуты относительно операций ∇ и Δ .*
3. *Факторизованная алгебраическая система вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ является верхней полурешеткой.*
4. *Алгебраическая система вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ является решеткой, если она однородна по кофрагментам.*

Доказательство.

1. Докажем от противного. Предположим, что $A_1 \nabla A_2 \leq B$. Тогда $A_1 \leq A_1 \nabla A_2$ и из транзитивности операции \leq следует $A_1 \leq B$, что противоречит условию утверждения.

2. Замкнутость приведенных множеств непосредственно следует из аксиом алгебраической системы $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$.

3. Покажем, что для двух объектов A_1, A_2 объект $A_1 \nabla A_2$ является супремумом. Предположим, что существует такой B , что $A_1 \leq B$ и $A_2 \leq B$ и B неэквивалентен $A_1 \nabla A_2$. Тогда выполнены соотношения $A_1 \nabla A_2 \leq B$ и $A_1 \nabla A_2 \cong B$. Выполнение аксиом полурешетки [6] следует из свойств операций ∇ и Δ и факторизованности системы.

4. Покажем, что в данном случае система вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ линейно упорядочена. Пусть $B = A_1 \Delta A_2$. Нетрудно видеть, что $A_1 \not\leq B$ и $A_2 \not\leq B$ и из однородности системы вытекает, что $A_1 \Delta A_2 \not\leq A_1 \Delta A_2$, что возможно только в случае, когда любые два объекта A_1 и A_2 сравнимы.

Положим для определенности, что для объектов A_1 и A_2 выполнено соотношение $A_1 \leq A_2$. Введем операции ∇ и Δ , полагая $A_1 \Delta A_2 = A_1$ и $A_1 \nabla A_2 = A_2$. Тогда

система является решеткой по определению [6]. Нетрудно показать, что все аксиомы определения системы $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ выполнены. \square

В предыдущем разделе был приведен пример отсутствия представления для объекта A_0 и конечного множества объектов F . Для алгебраических систем вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ справедливо следующее утверждение

Утверждение 8.

1. Существует конечное представление для всякого $A_0 \in \mathbf{A}$ и конечного множества $F \subseteq \mathbf{A}$.
2. Если система $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ финитно делима, то существует финитное конечное представление для всякого $A_0 \in \mathbf{A}$ и конечного множества $F \subseteq \mathbf{A}$.

Доказательство.

1. Пусть дано конечное множество объектов $F = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$. Построим разность F и $\cong A_0$ и обозначим через r ее мощность. Если $r = 0$, то представление $(A_0, 1)$ является искомым представлением.

В противном случае полагаем, что C_i есть разделяющий объект для A_0 и A_i , где $i \leq N$. Если $C_i \leq A_0$, то обозначим его как C'_i , в противном случае – C''_j . В результате получаем два конечных множества $\{C'_i\}$ и $\{C''_j\}$. Построим объект C' , применяя к элементам 1-го множества операцию ∇ и объекты C''_τ , применяя к элементам 2-го множества одного сорта τ операцию Δ . Если кофрагментов τ -го сорта среди C''_j нет, то положим C''_τ равным 1. Покажем, что полученный кортеж $(C'; C''_1, \dots, C''_r)$ будет искомым представлением для A_0 и F , где r – количество сортов кофрагментов A_0 .

Действительно, согласно аксиомам 1,2 алгебраической системы получаем, что $C' \leq A_0$ и $C''_k \not\leq A_0$ для всех $k \leq r$. Предположим, что существует такой неэквивалентный A_0 объект $B \in F$, что $C' \leq B$ и $C''_k \not\leq B$. Пусть C'_s есть разделяющий объект для B и A_0 . Но в этом случае $C'_s \not\leq A_0$, а значит и $C' \not\leq A_0$, что противоречит свойствам C' . Если же C''_s есть разделяющий объект для B и A_0 , то $C''_s \leq A_0$, что также противоречит свойствам C''_s . Полученное противоречие доказывает, что кортеж $(C'; C''_1, \dots, C''_r)$ будет искомым представлением для A_0 и F .

2. Следует из пункта 1 настоящего доказательства и того факта, что в процессе доказательства выбраны множества $\{C'_i\}$ и $\{C''_j\}$ финитной сложности. \square

Для локально замкнутых алгебраических систем вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ имеет место

Утверждение 9. Существует представление для всякого $A_0 \in \mathbf{A}$ и произвольного множества $F \subseteq \mathbf{A}$.

Доказательство. Пусть дано произвольное счетное множество объектов F . Удалим из данного множества $\cong A_0$ и обозначим мощность разницы r . Если разность пуста, то очевидно, что $(A_0, 1)$ является искомым представлением.

В противном случае полагаем, что C_i есть разделяющий объект для A_0 и A_i . Если $C_i \leq A_0$, то обозначим его как C'_i , в противном случае – C''_j . В результате получаем два не более чем счетных множества $\{C'_i\}$ и $\{C''_j\}$. Пусть объект C' получен применением операции ∇ ко всем элементам 1-го множества и объекты C''_k – результат применения к элементам 2-го множества сорта k операции Δ . Если кофрагмента сорта k нет среди C''_j , то полагаем C''_k равным 1.

Такие объекты всегда существуют в силу локальной замкнутости системы. Покажем, что полученный кортеж $(C'; C''_1, \dots, C''_r)$ будет искомым представлением для A_0 и F , где r – число сортов кофрагментов A_0 .

Действительно, имеют место соотношения $C' \leq A_0$ и $C''_k \not\leq A_0$ для всех $k \leq r$. Предположим, что существует такой неэквивалентный A_0 объект $B \in F$, что $C' \leq B$ и $C''_k \leq B$. Пусть C'_s есть разделяющий объект для B и A_0 . Тогда $C'_s \leq A_0$, а значит и $C' \leq A_0$, что противоречит свойствам C' . Если же C''_k есть разделяющий объект для B и A_0 , то $C''_k \leq A_0$, что также противоречит свойствам C''_k . Полученное противоречие показывает, что кортеж $(C'; C''_1, \dots, C''_r)$ будет искомым представлением для A_0 и F . \square

Для финитно разделимых и локально замкнутых алгебраических систем вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ справедлив метрический критерий финитной представимости:

Теорема 10. *Финитное представление для $A_0 \in \mathbf{A}$ и множества $F \subseteq \mathbf{A}$ существует тогда и только тогда, когда $A_0 \notin \text{Lim}F$.*

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что для более общих алгебраических систем из существования финитного представления для $A_0 \in \mathbf{A}$ и множества $F \subseteq \mathbf{A}$ следует, что $A_0 \notin \text{Lim}F$.

Обратно, пусть $A_0 \notin \text{Lim}F$. Тогда для любого $B_k \in F$, не эквивалентного A_0 , существует объект C_i , разделяющий A_0 и B_k со сложностью $n(C_i) \leq N_0$ для некоторого натурального числа N_0 . Если $C_i \leq A_0$, то обозначим его как C'_i , в противном случае – C''_j . В результате получаем два не более чем счетных множества $\{C'_i\}$ и $\{C''_j\}$. Пусть объект C' равен результату применения операции ∇ ко всем элементам 1-го множества и объекты C''_k – результат применения к элементам 2-го множества одинакового сорта k операции Δ . Если кофрагмента сорта k нет среди C''_j , то полагаем C''_k равным 1. Покажем, что полученный кортеж $(C'; C''_1, \dots, C''_r)$ будет искомым финитным представлением для A_0 и F , где r – число сортов кофрагментов A_0 .

Нетрудно показать, что $C' \leq A_0$ и $C''_k \not\leq A_0$ для всех $k \leq r$. Предположим, что существует такой неэквивалентный A_0 объект $B \in F$, что $C' \leq B$ и $C'' \leq B$. Пусть C'_s есть разделяющий объект для B и A_0 . Но в этом случае $C'_s \leq A_0$, а значит и $C'_s \leq A_0$, что противоречит свойствам C' . Если же C''_s есть разделяющий объект для B и A_0 , то $C''_s \leq A_0$, что также приводит к противоречию. Таким образом, кортеж $(C'; C''_1, \dots, C''_r)$ будет представлением для A_0 и F , причем $n(\{C', C''_1, \dots, C''_r\}) \leq N_0$. Теорема 10 доказана. \square

Метрический критерий представимости неструктурированных множеств дескрипторов [4] и теорема 10 обобщают аналогичные метрические критерии представимости для классов автоматов Мили [3] и помеченных графов.

Справедливо следующее

Следствие 11. *Для произвольных $A_0 \in \mathbf{A}_f$ и $F \subseteq \mathbf{A}_f$, где $n(F) \leq N_0$, существует финитное представление для A_0 и F сложности не выше $N' = \max(N_0, n(A_0))$.*

Доказательство. Выберем любой неэквивалентный A_0 объект $B \in F$. Если такого объекта нет, то пара $(A_0, 1)$ является искомым финитным представлением со сложностью $n(A_0)$. Пусть объект C разделяет A_0 и B . Очевидно, что $C \leq A_0$ или

$C \leq B$. В любом случае, $n(C) \leq N'$ и $\beta(A_0, B) \geq 1/N'$. Таким образом, выполнено $A_0 \notin \text{Lim}F$ и по теореме 10 существует финитное представление для A_0 и F со сложностью не выше N' . \square

Следующее утверждение позволяет порождать представления объединения классов в финитно разделимых и локально замкнутых алгебраических системах вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$

Утверждение 12. *Даны $A_0 \in \mathbf{A}$ и $F_1, F_2 \subseteq \mathbf{A}$. Если O_1 является представлением для A_0 и F_1 , а O_2 – представлением для A_0 и F_2 , то $O_1 \odot O_2$ есть представление для A_0 и $F_1 \cup F_2$.*

Доказательство. Пусть $O_1 = (A_1; B_1, \dots, B_r)$ и $O_2 = (A_2; C_1, \dots, C_s)$ – некоторые представления для A_0 и F_1, F_2 ранга r и s , соответственно. Если r не равно s , то всегда представления O_1 и O_2 можно расширить объектами 1 в нужных позициях кортежа для достижения $r = s$. Предположим, что $O_1 \odot O_2$ не является представлением для A_0 и $F_1 \cup F_2$. В этом случае существует неэквивалентный A_0 объект $B \in F_1 \cup F_2$, для которого $A_1 \nabla A_2 \leq B$ и $B_k \Delta C_k \not\leq B$. Без потери общности будем считать, что $B \in F_1$. Тогда из $A_1 \leq A_1 \nabla A_2$ и $A_1 \nabla A_2 \leq B$ следует, что $A_1 \leq B$. Аналогично, из соотношений $B_k \Delta C_k \not\leq B$ и $B_k \Delta C_k \leq B_k$ вытекает $B_k \not\leq B$. Но тогда кортеж O_1 не является представлением для A_0 и F_1 . Полученное противоречие доказывает утверждение 12. \square

Алгебраическая структура представлений в финитно разделимых и локально замкнутых алгебраических системах вида $(\mathbf{A}, \leq, \nabla, \Delta, n)$ описывается следующей

Теорема 13.

1. Множество представлений для фиксированных A_0 и F является идемпотентной и коммутативной полугруппой относительно операции \odot .
2. Множество финитных представлений для фиксированных A_0 и F является идемпотентной и коммутативной полугруппой относительно операции \odot .

Доказательство.

1. Замкнутость множества представлений для фиксированных A_0 и F относительно операции \odot следует из утверждения 12 при предположении $F_1 = F_2 = F$. Идемпотентность, коммутативность и ассоциативность операции \odot вытекает из аналогичных свойств операций ∇, Δ .

2. Вытекает из пункта 1 настоящего доказательства и соотношения $n(O_1 \odot O_2) \leq \max(n(O_1), n(O_2))$ для любых пар объектов O_1, O_2 . \square

5. Заключение. В настоящей статье методы исследования представлений неструктурированных объектов распространены на алгебраические структуры специального вида. Для локально замкнутых и финитно разделимых алгебраических систем получен метрический критерий существования финитных представлений, аналогичный результатам работы [4]. Описана алгебраическая структура представлений для фиксированных объекта-эталона и множества объектов.

1. Грунский И.С., Козловский В.А. Синтез и идентификация автоматов. – Киев.: Наукова думка, 2004. – 245 с.
2. Бородай С.Ю. Эксперименты в эффективно заданных классах автоматов: Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ – Саратов, 1997. – 21 с.
3. Максименко И.И. Эксперименты в финитно-определенных метрических пространствах автоматов: Автореферат канд. физ.-мат. наук; 01.01.09 / СГУ – Саратов, 2000. – 16 с.
4. Максименко И.И. Финитные представления неструктурированных объектов // Труды ИПММ. – 2009. – Т. 19. – С. 162-167.
5. Грунский И.С., Максименко И.И. Распознавание неструктурированных объектов // Труды ИПММ. – 2010. – Т. 21. – С. 76-85.
6. *Общая алгебра*. – Т. 1. / Под общ. ред. Л.А.Скорнякова. – М.: Наука, 1990. – 592 с.

I. S. Grunsky, I. I. Maksimenko

Finite representation in algebraic systems.

Concepts of representation, fragment and cofragment for some special algebraic systems are considered. A conditions of finiteness representations give in terms of specialized metrics of Ber. The algebraic properties and conditions for the existence of representations investigated for algebraic systems in the two cases.

Keywords: *unstructured object, representation, fragment, cofragment, algebraic systems.*

І. С. Грунський, І. І. Максименко

Фінітні зображення в алгебраїчних системах.

Введено поняття зображення, фрагмента та кофрагмента для деяких спеціальних алгебраїчних систем. У термінах спеціалізованих "беровських" метрик надано критерій фінітності зображень. Досліджено алгебраїчні властивості та умови існування зображень для алгебраїчних систем двох видів.

Ключові слова: *неструктурований об'єкт, зображення, фрагмент, кофрагмент, алгебраїчна система.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий национальный ун-т
it@bank-prsp.dn.ua

Получено 15.11.11

УДК 519.21+511.72

©2011. Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий

ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ, L-СИМВОЛИ ЯКОЇ В ЗОБРАЖЕННІ ЗНАКОДОДАТНИМ РЯДОМ ЛЮРОТА, Є НЕЗАЛЕЖНИМИ

В роботі вивчається лебегівська структура, тополого-метричні та фрактальні властивості розподілів випадкових величин, представлених рядами Люрота (L -зображеннями) за розподілами своїх “цифр” – L -зображення і навпаки. Доведено, що випадкова величина з незалежними L -символами має або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл; знайдено критерії належності кожному з чистих типів. Доведено, що “переважна” більшість цих розподілів є сингулярними, тобто зосередженими на множинах нульової міри Лебега (фракталах). Описано тополого-метричні властивості спектрів розподілів випадкових величин, та властивості їх функцій розподілу.

Ключові слова: розклади чисел в знакододатні ряди Люрота, геометрія L -зображення, абсолютно неперервний розподіл, сингулярний розподіл, лебегівська структура розподілу, ортогональні розподіли.

Вступ. У 1883р. J. Lüroth [13] довів, що кожне $x \in (0, 1]$ є сумою ряду:

$$x = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1(d_1 - 1)d_2} + \dots + \frac{1}{d_1(d_1 - 1)d_2(d_2 - 1)\dots d_{n-1}(d_{n-1} - 1)d_n} + \dots, \quad (1)$$

де (d_n) – деяка послідовність натуральних чисел, більших 1. Цим самим була побудована ще одна (крім s -кових розкладів, зображень чисел рядами Кантора [8] та рядами Сільвестера [16] тощо) модель дійсного числа з використанням натуральних чисел та рядів. Це дозволило розширити використання різних форм “існування” дійсного числа для моделювання та дослідження різних математичних об’єктів (множин, функцій, операторів, мір, динамічних систем тощо [6]). Дослідженню та застосуванню розкладів (1) присвячено небагато досліджень. Розгляд різних аспектів цих питань можна знайти у кількох джерелах [7, 9, 10, 14, 12, 11], в яких також розглядався і знакозмінний аналог розкладів Люрота. Розклади чисел в ряди Люрота, як ряди Остроградського 1-го та 2-го видів [1, 3], ряди Енгеля [4], \tilde{Q}_∞ -зображення [5], відносяться ко класу систем зображень чисел з нульовою надлишковістю і нескінченним алфавітом. Його принциповою відмінністю є “самоподібна геометрія”. Зазначимо, що енциклопедичною в цьому відношенні є стаття Серпінського [15], де вказується кілька різних способів розкладу чисел у додатні та знакозмінні ряди, члени яких є числами, оберненими до натуральних.

Теорема 1. [2] Для довільного числа $x \in (0, 1]$ існує єдина послідовність натуральних чисел (d_n) , $d_n = d_n(x)$ така, що

$$x = \frac{1}{d_1 + 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1 + 1)d_2(d_2 + 1)\dots d_{n-1}(d_{n-1} + 1)(d_n + 1)}. \quad (2)$$

Рівність (2) скорочено записуватимемо у формі $x = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n}^L$ і називатимемо L -зображенням числа x , при цьому d_n – його n -тою L -цифрою, або L -символом.

1. Геометрія L -зображення дійсних чисел.

Означення 1. Нехай (c_1, c_2, \dots, c_m) – фіксований впорядкований набір натуральних чисел. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L := \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m d_{m+1} d_{m+2} \dots}^L, d_{m+i} \in N\}.$$

Циліндри мають наступні властивості:

1. $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L = \bigcup_{i_1=1}^{\infty} \dots \bigcup_{i_k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m i_1 i_2 \dots i_k}^L \forall k \in N$.
2. Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$ є півінтервалом з кінцями

$$\inf \Delta_{c_1 \dots c_m}^L = \frac{1}{c_1+1} + \frac{1}{c_1(c_1+1)(c_2+1)} + \dots + \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_{m-1}(c_{m-1}+1)(c_m+1)} = a_m;$$

$$\max \Delta_{c_1 \dots c_m}^L = a_m + \frac{1}{b_m}, \quad \text{де } b_m = c_1(c_1+1)\dots c_m(c_m+1).$$

3. Довжина циліндра виражається формулою

$$|\Delta_{c_1 \dots c_m}^L| = \frac{1}{c_1(c_1+1)\dots c_m(c_m+1)} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Зауваження. З властивостей 1 і 3 та аксіоми Кантора випливає, що для довільної послідовності натуральних чисел (c_n) переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L = x \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$$

є точкою півінтервалу $(0, 1]$ і вибір її позначення є природним.

4. Якщо $d_j(a) = d_j(b)$ при $j < m$ і $d_m(a) > d_m(b)$, то $a < b$.
5. Має місце рівність: $|\Delta_{c_1 \dots c_m}^L| = i(i+1) |\Delta_{c_1 \dots c_m i}^L|$.
6. $\sum_{j=a+1}^{\infty} |\Delta_{c_1 \dots c_m j}^L| = a |\Delta_{c_1 \dots c_m a}^L|$.
7. $|\Delta_{c_1 \dots c_m a}^L| = \sum_{j=a(a+1)}^{\infty} |\Delta_{c_1 \dots c_m j}^L|$.
8. $|\Delta_{c_1 \dots c_m (i+1)}^L| = \frac{2i}{i+2} |\Delta_{c_1 \dots c_m i}^L|$.
9. Якщо $a < b$ і $d_j(a) = d_j(b)$ при $j < m$, але $d_m(a) \neq d_m(b)$, то
 - 1) $(a, b] \subset \Delta_{d_1(a) \dots d_{m-1}(a)}^L$, 2) $\Delta_{d_1(a) \dots d_{m-1}(a) d_m(b) (d_{m+1}(b)+1)}^L \subset (a, b]$.

Теорема 2. Множина $C \equiv C[L, V] = \{x : x = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n}^L, d_n(x) \in V \subset N\}$ є:

1. півінтервалом $(0, 1]$, коли $V = N$;
2. ніде не щільною незамкненою множиною нульової міри Лебега, яка з точністю до зліченної множини співпадає зі своїм замиканням, коли $V \neq N$.

3. самоподібною, якщо V – скінченна, і N -самоподібною, якщо V – нескінченна множина, причому її самоподібна (N -самоподібна) розмірність α_s є числом

$$\alpha_s = \sup_n \left\{ x : \sum_{v:V \ni v \leq n} \left(\frac{1}{v(v+1)} \right)^x = 1 \right\}. \quad (3)$$

Доведення. Твердження 1 є очевидним. 2. Нехай $V \neq N$. Легко бачити, що

$$C \subset \bigcup_{d_1 \in V} \Delta_{d_1}^L, \quad C \subset \bigcup_{d_1 \in V} \dots \bigcup_{d_n \in V} \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n}^L \equiv F_n \subset F_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k.$$

Доведемо ніде не щільність C . Нехай (a, b) – довільний інтервал з $(0, 1]$. Очевидно, що циліндр $\Delta_{d_1(b) \dots d_m(b) d_{m+1}(b)+1}^L \subset (a, b)$, де $d_m(b) \neq d_m(a)$. Тоді інтервал (α, β) , кінці якого співпадають з кінцями циліндра $\Delta_{d_1(b) \dots d_m(b) (d_{m+1}(b)+1)v}^L$, де $v \in N \setminus V$, не містить точок множини C . Отже, множина C є ніде не щільною за означенням.

Доведемо нуль-мірність C . Справді, для міри Лебега λ виконується

$$\lambda(C) \leq \sum_{d_1 \in V} \dots \sum_{d_n \in V} |\Delta_{d_1 \dots d_n}^L| = \sum_{d_1 \in V} \dots \sum_{d_n \in V} \prod_{i=1}^n \frac{1}{d_i(d_i+1)} = b^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

де $0 < b^n = \sum_{v \in V \neq N} \frac{1}{v(v+1)} < 1$. Отже, $\lambda(C) = 0$.

3. Оскільки $C = \bigcup_{v \in V} [\Delta_v^L \cap C]$ і

$$1) C \stackrel{k_v}{\approx} \Delta_v^L \cap C, \quad \text{де } k_v = \frac{1}{v(v+1)}, \quad 2) (\Delta_{v_i}^L \cap C) \cap (\Delta_{v_j}^L \cap C) = \emptyset,$$

то C є самоподібною, якщо V – скінченна; N -самоподібною, якщо V – нескінченна.

За означенням самоподібна (N -самоподібна) розмірність її визначається. \square

Розглянемо узагальнення множини $C[L, V]$, а саме:

$$C[L, (V_n)] = \{x : x = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n}^L, \quad d_n(x) \in V_k \subset N, \quad n = 1, 2, \dots\}$$

Очевидно, що множина $C[L, (V_n)]$ є: 1) півінтервалом $(0, 1]$, якщо всі $V_n = N$, $n \in N$; 2) об'єднанням циліндрів рангу m , якщо $V_j = N$ при $j > m$; 3) ніде не щільною множиною, якщо $V_n \neq N$ нескінченну кількість разів.

2. Розподіл L -символів рівномірно розподіленої величини.

Теорема 3. Якщо випадкова величина (в.в.) τ має рівномірний розподіл на $[0, 1]$, то її L -символи τ_k ($k = 1, 2, \dots$) є незалежними і однаково розподіленими, причому

$$P\{\tau_k = i\} = \frac{1}{i(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Доведення. Оскільки τ має рівномірний розподіл на $[0, 1]$, то

1. $P\{\tau = a\} = 0$ для довільного $a \in [0, 1]$ і

2. $P\{\tau \in (a, b)\} = P\{\tau \in [a, b]\} = P([a, b]) = b - a$, зокрема для довільного циліндра $\Delta_{c_1 \dots c_m}^L$, згідно властивості циліндрів, має місце рівність

$$P(\Delta_{c_1 \dots c_m}^L) = |\Delta_{c_1 \dots c_m}^L| = \prod_{i=1}^m \frac{1}{c_i(c_i + 1)}.$$

Враховуючи неперервність розподілу в.в. τ та властивості циліндрів, маємо

$$P\{\tau_1 = i\} = P\{\tau \in \Delta_i\} = P(\Delta_i) = |\Delta_i| = \frac{1}{i(i+1)};$$

$$P\{\tau_2 = i\} = P\{\tau \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_{ji}\} = \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_{ji}| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}; \dots;$$

$$P\{\tau_{k+1} = i\} = P\{\tau \in \bigcup_{j_1=1}^{\infty} \dots \bigcup_{j_k=1}^{\infty} \Delta_{j_1 \dots j_k i}^L\} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_k=1}^{\infty} |\Delta_{j_1 \dots j_k i}^L| = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Оскільки остання ймовірність не залежить від k , а лише від i , то τ_k є незалежними і однаково розподіленими. \square

3. Лебегівська структура розподілу випадкової величини з незалежними L -символами. Розглядається в.в. $\xi = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n}^L$, L -символи τ_n якої є незалежними і мають розподіли $P\{\tau_n = i\} = p_{in} \geq 0$; $p_{1n} + \dots + p_{in} + \dots = 1$.

Теорема 4. Якщо символи L -зображення в.в. ξ є незалежними, то розподіл ξ є або чисто дискретним, або чисто неперервним, причому чисто дискретним є тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0.$$

Множина атомів дискретно розподіленої в.в. ξ складається з точки x_0 такої, що $p_{d_j(x_0)j} = \max_i \{p_{ik}\}$, і всіх точок x , які мають властивість $p_{d_j(x)j} > 0$ для довільного $j \in N$ і існує таке $m \in N$, що $d_j(x) = d_j(x_0)$ при $j \geq m$.

Доведення. З незалежності τ_k і єдиності L -зображення випливає, що

$$P\{\xi = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L\} = \prod_{k=1}^m p_{c_k k}, \quad \text{тобто} \quad P\{\xi = x\} = \prod_{j=1}^{\infty} p_{d_j(x)j}.$$

Спочатку доведемо н е о б х і д н і с т ь: якщо $M > 0$, то розподіл ξ є чисто дискретним. Оскільки $P\{\xi = x_0\} = M$, то $P\{\xi = x_0\} > 0$.

Якщо $p_{d_k(x')k} > 0 \forall k \in N$ і L -зображення точки x' відрізняється від зображення точки x_0 не більше, ніж першими $(m - 1)$ L -символами, то

$$P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{d_k(x')k} \cdot \prod_{k=m}^{\infty} p_{d_k(x_0)k} = \prod_{k=1}^{m-1} p_{d_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod_{k=1}^m p_{d_k(x_0)k}}.$$

Нехай A_m – множина всіх точок x' , L -цифри яких співпадають з L -цифрами точки x_0 , починаючи з m . Тоді послідовність множин A_m має властивості:

1. $\{x_0\} = A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_m \subset A_{m+1} \subset \dots$
2.
$$P\{\xi \in A_m\} = \sum_{d_1 \in N} \dots \sum_{d_{m-1} \in N} \left(\prod_{k=1}^{m-1} p_{d_k(x')k} \cdot \frac{M}{\prod_{k=1}^m p_{d_k(x_0)k}} \right) =$$

$$= \frac{M}{\prod_{k=1}^m p_{d_k(x_0)k}} \rightarrow 1 (m \rightarrow \infty).$$

Отже, зліченна множина $A = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ є носієм розподілу в.в. ξ , тобто розподіл є дискретним.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо ξ має дискретний розподіл, то існує x' таке, що

$$0 < P\{\xi = x'\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{d_k(x')k} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = M. \quad \square$$

Лема 1. Функція розподілу (ф.р.) в.в. ξ подається у вигляді

$$F_{\xi}(x) = \beta_{d_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{d_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{d_j(x)j} \right), \quad \text{де} \quad \beta_{d_k(x)k} = \sum_{j=d_k+1}^{\infty} p_{jk}, \quad k \in N.$$

Доведення. Згідно з означенням ф.р. $F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}$.

Подія $\{\xi < x\}$ є об'єднанням несумісних подій $\{\tau_1 > d_1(x)\}$, $\{\tau_1 = d_1(x) \wedge \tau_2 > d_2(x)\}$, \dots , $\{\tau_j = d_j(x), j = 1, k-1 \wedge \tau_k > d_k(x)\}$, \dots .

Тому

$$P\{\xi < x\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\tau_j = d_j(x), j = \overline{1, k-1} \wedge \tau_k > d_k(x)\}.$$

Але з незалежності випадкових подій τ_k отримаємо

$$P\{\tau_j = d_j(x), j = \overline{1, k-1} \wedge \tau_k > d_k(x)\} = \beta_{d_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{d_j(x)j}.$$

А отже, $F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} = \beta_{d_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{d_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{d_j(x)j} \right)$. \square

Наслідок. Приріст δ ф.р. F_{ξ} на циліндрі $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$ обчислюється за формулою

$$\delta \equiv \delta(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L) = \prod_{i=1}^m p_{c_i i}.$$

Лема 2. Якщо в точці $x_0 = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n}^L$ ф.р. F_{ξ} має похідну, то

$$F'_{\xi}(x_0) = \prod_{i=1}^{\infty} (d_i(d_i + 1)p_{d_i i}) \equiv A(x_0).$$

Справді, оскільки $F'_\xi(x_0)$ існує, то

$$F'_\xi(x_0) = \lim_{\substack{x' < x_0 < x'' \\ x'' - x' \rightarrow 0}} \frac{F_\xi(x'') - F_\xi(x')}{x'' - x'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(\Delta_{d_1 \dots d_m}^L)}{|\Delta_{d_1 \dots d_m}^L|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m (d_i(d_i + 1)p_{d_i}).$$

Лема 3. Спектр S_ξ розподілу в.в. ξ (тобто його мінімальний замкнений носій) є замиканням множини

$$B_\xi = \{x : x = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n}^L, \text{ де } p_{d_n(x)n} > 0 \forall n \in N\} = C[L, (V_n)].$$

Доведення. Взагалі кажучи, B_ξ не є замкненою, тому для доведення леми досить показати, що $B_\xi \subset S_\xi$ і кожна внутрішня точка $[0, 1] \setminus B_\xi$ не належить S_ξ .

Покажемо, що точка x' , для якої мають місце співвідношення $p_{d_j(x')j} > 0$ для будь-якого $j \in N$, належить спектру S_ξ .

Згідно з означенням, x' є точкою росту ф.р. F_ξ , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $F_\xi(x' + \varepsilon) - F_\xi(x' - \varepsilon) > 0$. Оскільки для довільного $\varepsilon > 0$ легко вказати циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L$, який містить x' , ($p_{c_i} > 0$) повністю належить інтервалу $(x' - \varepsilon, x' + \varepsilon)$, то для приростів виконуються нерівності

$$F_\xi(x' + \varepsilon) - F_\xi(x' - \varepsilon) \equiv \delta((x' - \varepsilon, x' + \varepsilon)) \geq \delta(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L) = \prod_{i=1}^m p_{c_i} > 0.$$

Якщо точка $x' \in [0, 1] \setminus B_\xi$ не є кінцем жодного з циліндрів і існує $p_{d_j(x')j} = 0$, то згідно з наслідком леми x' належить інтервалу сталості функції $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_m} \equiv \text{int} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$. Розглянувши $\varepsilon > 0$ таким, що $(x' - \varepsilon, x' + \varepsilon) \subset \nabla_{c_1 c_2 \dots c_m}$, матимемо

$$F_\xi(x' + \varepsilon) - F_\xi(x' - \varepsilon) \leq \delta(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^L) = 0, \quad \text{тобто } x' \notin S_\xi. \quad \square$$

Теорема 5. Спектр S_ξ розподілу в.в. ξ є: 1) відрізком $[0, 1]$, якщо матриця $\|p_{ik}\|$ нулів не містить; 2) об'єднанням відрізків, якщо $\|p_{ik}\|$ містить нулі у скінченній кількості стовпців; 3) ніде не щільною множиною, міра Лебега якої обчислюється за формулою

$$\lambda(S_\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k, \quad \text{де } W_k = \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)}, \quad k \in N, \quad (4)$$

якщо матриця $\|p_{ik}\|$ містить нулі у нескінченній кількості стовпців.

Доведення. Твердження 1) є очевидним. 2) Нехай $p_{ik} > 0$ для $i \in N, k \geq m$. Оскільки

$$P\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_m i_{m+1} \dots i_{m+n}}^L\} = \left(\prod_{c_i:p_{c_i i} > 0} p_{c_i i} \right) \cdot \prod_{j=m+1}^{m+n} p_{i_j j} > 0$$

для довільного набору натуральних чисел $(i_{m+1}, \dots, i_{m+n}), n \in N$, то F_ξ є строго зростаючою на кожному з циліндрів $\Delta_{c_1 \dots c_m}^L$, для яких $p_{c_k k} > 0, k = \overline{1, m-1}$. Тобто в цьому випадку S_ξ є замиканням множини $\bigcup_{c_i:p_{c_i i} > 0} \Delta_{c_1 \dots c_m}^L$.

3) Виходячи з означення спектра S_ξ і наслідку з леми 1, для кожного $k \in N$ маємо $S_\xi \cap \Delta_{d_1 \dots d_k}^L = \emptyset$, якщо $\exists m \leq k: p_{d_m m} = 0$,

$$S_\xi \cap \Delta_{d_1 \dots d_k}^L \neq \emptyset, \quad \text{якщо} \quad \prod_{j=1}^k p_{d_j j} > 0.$$

Тому

$$\begin{aligned} \lambda(S_\xi) &= 1 - \sum_{d_1: p_{d_1 1}=0} |\Delta_{d_1}^L| - \sum_{\substack{d_1: p_{d_1 1} > 0 \\ d_2: p_{d_2 2} = 0}} |\Delta_{d_1 d_2}^L| - \dots - \sum_{\substack{d_1, \dots, d_{k-1}: \prod_{j=1}^{k-1} p_{d_j j} > 0 \\ d_k: p_{d_k k} = 0}} |\Delta_{d_1 \dots d_k}^L| = \\ &= 1 - M_1 - W_1 M_2 - W_1 W_2 M_3 - \dots = W_1 - W_1 M_2 - W_1 W_2 M_3 - \dots = \\ &= W_1 W_2 - W_1 W_2 M_3 - \dots = \prod_{k=1}^{\infty} W_k, \quad \text{де} \quad M_k = 1 - W_k. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 6. *Неперервна ($M = 0$) в.в. ξ з незалежними L -символами має або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл.*

Доведення. Нехай $\delta = (\delta_1 \dots \delta_m)$, де $m \in N$, $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ – деякий впорядкований набір натуральних чисел. T_δ^m -перетворенням точки $x = \Delta_{d_1 \dots d_k}^L$ називатимемо точку $\Delta_{\delta_1 \dots \delta_m d_1 \dots d_k}^L \equiv T_\delta^m(x)$. Очевидно, що T_δ^m -перетворення має єдину інваріантну точку x_0 , яка має чисто періодичне L -зображення з періодом $(\delta_1 \dots \delta_m): x_0 = \Delta_{(\delta_1 \dots \delta_m)}^L$.

T_δ^m -перетворенням множини E називається множина T_δ^m -образів всіх $x \in E$:

$$T_\delta^m(E) = \{x : \Delta_{\delta_1 \dots \delta_m d_1 \dots d_k}^L, \text{ де } \Delta_{d_1 \dots d_k}^L \in E\}.$$

Легко бачити, що $T_\delta^m((0; 1]) = \Delta_{\delta_1 \dots \delta_m}^L$ і T_δ^m -перетворення є перетворенням подібності з коефіцієнтом $k = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\delta_i(\delta_i + 1)}$. Очевидно, що $\lambda[T_\delta^m(E)] = k\lambda(E)$, а тому, $\lambda[T_\delta^m(E)]$ і $\lambda(E)$ рівні нулю одночасно.

Через $T^m(x)$ позначимо множину всіх образів x під дією T_δ^m -перетворення, де δ пробігає множину всеможливих наборів довжини m натуральних чисел.

Нехай E – борелівська множина з $(0; 1]$, $T^0(x) \equiv x$, T – множина всеможливих перетворень T^m для всіх скінченних значень m . Оскільки подія $A = \{\xi \in T(E)\}$ є залишковою множиною відносно всіх σ -алгебр B_k , породжених першими τ_1, \dots, τ_k , то за законом 0 і 1 Колмогорова $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.

Можливі випадки: 1) існує множина E міри Лебега нуль така, що $P\{\xi \in E\} > 0$; 2) такої множини E немає, тобто для кожної E : з $\lambda(E) = 0$ випливає $P\{\xi \in E\} = 0$.

У першому випадку $P\{\xi \in T(E)\} = 1$ і $\lambda\{T(E)\} = 0$, тобто ξ має чисто сингулярно неперервний розподіл; у другому – чисто абсолютно неперервний, згідно з означенням. Отже, розподіл в.в. ξ є чистим. \square

Лема 4. Для довільного набору дійсних чисел $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ таких, що $p_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, виконується

$$\prod_{k=1}^{\infty} (k(k+1)p_k)^{p_k} \geq 1,$$

причому рівність має місце лише при $p_i = (i(i+1))^{-1} \forall i \in \mathbb{N}$.

Дане твердження є наслідком леми 3.8.1 [6].

Якщо $N_i(x, k)$ – кількість символів i в L -зображенні x до k -го місця включно, то границя (якщо вона існує) $\lim_{k \rightarrow \infty} N_i(x, k)k^{-1} = \nu_i(x)$ називається частотою символа i в L -зображенні x .

Число x , для якого частота $\nu_i(x) = (i(i+1))^{-1} \forall i \in \mathbb{N}$, називається L -нормальним.

Використовуючи посилений закон великих чисел, можна довести, що множина H всіх L -нормальних чисел відрізка $[0; 1]$ має міру Лебега рівну 1.

Теорема 7. Неперервний розподіл ($M = 0$) в.в. ξ є число абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)} \right] > 0, \quad (\text{i}) \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)} \ln i(i+1)p_{ik} < \infty, \quad (\text{ii}) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)} \ln^2 i(i+1)p_{ik} < \infty. \quad (\text{iii}) \end{array} \right.$$

Доведення. Якщо добуток (i) розбігається до нуля, то ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Тому вважатимемо, що має місце нерівність (i).

Відомо, що ф.р. майже скрізь має скінченну похідну. Множину таких точок зі спектра S_{ξ} позначимо через H . Вона складається з двох частин H_0 і H_+ , в першу з яких входять такі x , що $F'_{\xi}(x) = 0$, а в другу – такі x , що $0 < F'_{\xi}(x) < \infty$. Якщо $\lambda(H_+) = 0$, то розподіл ξ є сингулярним, в протилежному випадку, враховуючи чистоту, ξ матиме абсолютно неперервний розподіл.

Нехай G – множина L -нормальних точок, в яких похідна $F'_{\xi}(x)$ скінченна, тоді $\lambda(G) = 1$. Якщо x_0 – довільна точка з G , то, згідно з лемою 2,

$$F'_{\xi}(x_0) = A(x_0) = e^{B(x_0)}, \quad \text{де} \quad B(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(d_k(d_k+1)p_{d_k k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k. \quad (5)$$

Для кожного конкретного x_0 ряд (5) – числовий ряд. Випадковий вибір $x_0 \in S_{\xi}$ веде до випадкового числа $A(x_0)$. Тому на (5) можна дивитись як на ряд з незалежних в.в. $\tau_k = \ln(d_k(d_k+1)p_{d_k k})$, які набувають значень

$$g_{1k} = \ln(2p_{1k}), \quad g_{2k} = \ln(6p_{2k}), \dots, \quad g_{sk} = \ln(s(s+1)p_{sk}), \dots$$

Оскільки $F'(x_0) < \infty$ рівносильно тому, що (5) збігається, а $F'(x_0) = 0$ рівносильно $B(x_0) = -\infty$, причому $x_0 \in H_0$ чи $x_0 \in H_+$ не залежить від будь-якої скінченної кількості перших L -символів x_0 , то подія $A = \{\text{"ряд (5) збігається"}\}$ (рівносильна "хвіст" ряду (5) збігається") є залишковою і згідно з законом "0 та 1" $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$. Тому факту: $F(x)$ майже скрізь на S_ξ має скінченну похідну, можна дати інтерпретацію в термінах збіжності ряду (5). Справді, якщо розподіл в.в. τ_k вибрати таким, щоб $p_{d_k k}$ набували значень $p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{sk}, \dots$ з ймовірностями $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{s(s+1)}, \dots$, то матимуть місце рівності

$$P\{x : 0 < B(x) < \infty\} = \frac{\lambda(H_+)}{\lambda(S_\xi)}, \quad P\{x : B(x) = -\infty\} = \frac{\lambda(H_0)}{\lambda(S_\xi)}.$$

Таким чином, інша інтерпретація того факту, що $F_\xi(x)$ має на S_ξ скінченну похідну майже скрізь, полягає в тому, що коли $x \in S_\xi$ вибрано випадково так, що його L -символи $d_k(x)$ набувають значень $1, 2, \dots, s, \dots$ з ймовірностями $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{s(s+1)}, \dots$, то з ймовірністю 1 випадковий ряд (iii) збігається або розбігається до $-\infty$ і навпаки. Тому $F'_\xi(x) = 0$ ($0 < F'_\xi(x) < \infty$) майже скрізь на S_ξ рівносильно збіжності (розбіжності) з ймовірністю 1 випадкового ряду (5). Знайдемо необхідні й достатні умови збіжності останнього з ймовірністю 1.

За законом "0 та 1" для залишкових подій можливі два взаємнодовповнюючі і виключаючі випадки: 1. $P\{x : \tau_k(x) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty\} = 0$, 2. $P\{x : \tau_k(x) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty\} = 1$. Якщо має місце 1, то з ймовірністю 1 ряд (5) розбігається, $F'_\xi(x) = 0$ майже скрізь, тобто $F_\xi(x)$ – сингулярна, і при цьому порушується одна з умов (i)-(iii).

У випадку 2 очевидно, що множина

$$G' = \{x : \tau_k(x) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty\} = \left\{x : p_{d_k(x)k} \rightarrow \frac{1}{k(k+1)}, k \rightarrow \infty\right\}$$

має ту ж міру Лебега, що й S_ξ . Оскільки математичне сподівання τ_k дорівнює $M[\tau_k] = \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)} \ln i(i+1)p_{ik}$, то умова (ii) рівносильна збіжності ряду з математичних сподівань τ_k :

$$\sum_{k=1}^{\infty} M[\tau_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)} \ln i(i+1)p_{ik}. \quad (6)$$

Враховуючи, що дисперсія $D[\tau_k] = M[\tau_k^2] - M^2[\tau_k]$ і те, що із збіжності (6) випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} M^2[\tau_k]$, приходимо до висновку, що з умови (iii) слідує збіжність ряду з дисперсій в.в. τ_k , тобто $\sum_{k=1}^{\infty} D[\tau_k]$. Тоді за теоремою Колмогорова (про два ряди) з умов (i)-(iii) випливає збіжність з ймовірністю 1 випадкового ряду (5), що дає абсолютну неперервність розподілу ξ .

Нехай ряд (ii) розбігається, що рівносильно розбіжності ряду (6). Тоді можливі випадки: 1) існує $\varepsilon \in (0; 1)$ таке, що $1 - \varepsilon < i(i+1)p_{ij} \forall i \in N, \forall j \in N$; 2) такого ε

немає, тобто для кожного $\varepsilon \in (0; 1)$ існує множина $J = \{j_1, \dots, j_k, \dots\}$, $j_{k+1} > j_k$, для кожного елемента j_k якої існує i_k таке, що $i_k(i_k + 1)p_{i_k j_k} < 1 - \varepsilon$.

У випадку 1) в.в. $\{d_k(d_k + 1)p_{d_k k}\}$ є відокремленими від 0. Тоді за теоремою Колмогорова (про три ряди), враховуючи лему 4, випадковий ряд (5) з ймовірністю 1 розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності (ряд з математичних сподівань розбігається). Тому розподіл ξ є сингулярним.

У випадку 2) ф.р. $F_\xi(x)$ в.в. ξ може мати відмінну від нуля похідну лише на множині чисел, L -зображення яких на нескінченній кількості місць не може використовувати одного чи кількох L -символів, а така множина згідно з теоремою 5 має міру Лебега нуль, що рівносильно сингулярності розподілу ξ .

Якщо ж розбігається ряд (iii), то розбігається ряд (ii) і наведені міркування приводять до попереднього висновку. \square

Наслідок. *Неперервний розподіл ($M = 0$) в.в. ξ є число сингулярно неперервним тоді і тільки тоді, коли порушується хоча б одна з умов (i)-(iii).*

4. Тополого-метричні властивості сингулярного розподілу ξ . Нагадаємо [6], що сингулярні розподіли за своїми тополого-метричними властивостями спектрів бувають трьох типів. Сингулярний розподіл в.в. називається: 1) розподілом канторівського типу (або C -типу), якщо його спектр S_ξ є множиною нульової міри Лебега. 2) розподілом салемиївського типу (або S -типу), якщо його спектр S_ξ містить відрізки; 3) розподілом квазіканторівського типу (або K -типу), якщо спектр S_ξ є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Теорема 8. *Сингулярний розподіл в.в. ξ є сингулярним розподілом: 1) C -типу тоді і тільки тоді, коли добуток (4) розбігається; 2) S -типу тоді і тільки тоді, коли матриця $\|p_{ik}\|$ має скінченну кількість стовпців, які містять нулі; 3) K -типу тоді і тільки тоді, коли (4) збігається, а матриця $\|p_{ik}\|$ містить нескінченну кількість стовпців, які містять нулі.*

Доведення. Теорема 8 є наслідком теореми 5. Справді, якщо матриця $\|p_{ik}\|$ має лише скінченну кількість стовпців, які містять нулі, то спектр розподілу ξ є об'єднанням відрізків і сам розподіл належить S -типу. Якщо ж таких стовпців нескінченна кількість, то спектр є ніде не щільною множиною. При цьому нульової міри Лебега, якщо добуток (4) розбігається до нуля, тобто ξ має розподіл C -типу, і додатної міри при збіжності добутку (4), тобто розподіл ξ належить до K -типу. Оскільки наведені умови є несумісними, то це доводить теорему. \square

5. Випадкові величини з однаково розподіленими L -символами. Нехай $\xi_0 = \Delta_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \dots}^L$ – в.в., L -символи τ_k якої є незалежними і однаково розподіленими, тобто $P\{\tau_k = i\} = p_{ik} = p_i$. Як впливає з попереднього, розподіл в.в. ξ_0 є або виродженим (дискретним розподілом з одним атомом), коли $\max_i p_i = 1$; або рівномірним, коли $p_i = \frac{1}{i(i+1)}$ для кожного $i \in N$; або сингулярно неперервним – в решті випадків. Таким чином, властивість сингулярності розподілу є домінуючою у досліджуваному класі.

Теорема 9. *Має місце рівність*

$$\int_0^1 F_{\xi_0}(x) dx = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i(i+1)}}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i(i+1)}}. \quad (7)$$

Доведення. Використовуючи адитивну властивість інтеграла Лебега, маємо

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^1 F_{\xi_0}(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} [\beta_i + p_i F_{\xi_0}(\Delta_{d_2 d_3 \dots d_n}^L)] dx = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i(i+1)} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i(i+1)} \right) \cdot \int_0^1 F_{\xi_0}(x) dx. \end{aligned}$$

А тому

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{i(i+1)} \right) \cdot I = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i(i+1)}.$$

Звідси отримуємо (7). \square

Нехай стохастичний вектор $(p_k^{(i)})$ задає розподіл в.в. $\xi_0^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$.

Теорема 10. *Якщо $(p_k^{(1)}) \neq (p_k^{(2)})$, то розподіли в.в. $\xi_0^{(1)}$ і $\xi_0^{(2)}$ ортогональні.*

Доведення. Одним з носіїв розподілу $\xi_0^{(i)}$ є множина

$$M^{(i)} \equiv M[p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}, \dots] = \{x : \nu_n(x) = p_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots\}, i \in \{1, 2\},$$

тобто $P\{\xi_0^{(i)} \in M^{(i)}\} = 1$. Оскільки при $(p_k^{(1)}) \neq (p_k^{(2)})$ і $M^{(1)} \cap M^{(2)} = \emptyset$, то

$$P\{\xi_0^{(1)} \in M^{(1)}\} = P\{\xi_0^{(2)} \in [0; 1] \setminus M^{(1)}\} = 1,$$

тобто розподіли $\xi_0^{(1)}$ і $\xi_0^{(2)}$ ортогональні за означенням. \square

1. Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, № 9. – С. 1155-1168.
2. Жижарева Ю.І., Працьовитий М.В. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 9. – С. 200-211.
3. Працьовита І.М. Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 174-189.
4. Працьовитий М.В., Гетьман Б.І. Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часоп. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 105-116.

5. Працьовитий М.В., Лецинський О.Л. Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого \tilde{Q}_∞ -зображення // Теорія ймовірн. та мат. стат. – 1997. – № 57. – С. 134-139.
6. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
7. Barrionuevo J., Burton R., Dajani K., Kraaikamp C. Ergodic properties of generalized Lüroth series // Acta Arith. – 1996. – № 4 – P. 311-327.
8. Cantor G. Über die einfachen Zahlensysteme // Z. Math. Phys. – 1869. – Bd. 14. – S. 121-128.
9. Dajani K., Kraaikamp C. On approximation by Lüroth series // J. Théor. Nombres Bordeaux. – 1996. – 8, № 2. – P. 331-346.
10. Galambos J. Some remarks on the Lüroth expansion. // Czechoslovak Math. J. – 1972. – 22, № 2. – P. 266-271.
11. Ganatsiou C. On some properties of the Lüroth-type alternating series representations for real numbers // Int. J. Math. Math. Sci. – 2001. – 28, № 6. – P. 367-373.
12. Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J. Metric properties of alternating Lüroth series // Portugal. Math. – 1991. – 48, № 3. – P. 319-325.
13. Lüroth J. Über eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. – 1883. – 21. – P. 411-423.
14. Šalát T. Zur metrischen Theorie der Lürothschen Entwicklungen der reellen Zahlen // Czechoslovak Math. J. 1968. – 18, № 3. – P. 489-522.
15. Sierpinski W. O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi // Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III. – 1911. – 4. – P. 56-77.
16. Sylvester J.J. On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. J. Math. – 1880. – 3, № 4. – P. 332-335. – Postscript, ibid 388-389.

Yu. Zhykharyeva, M. Pratsiovytyi

Properties of distribution of random variable with independent L -symbols of representation by the positive Lüroth series.

In the paper we consider the distributions of random variables represented by the Lüroth series (L -representation). We study Lebesgue structure, topological, metric and fractal properties of these random variables depending on distributions of their “digits” of the L -representation, and vice versa. We prove that random variable with independent L -symbols has a pure discrete, pure absolutely continuous or pure singularly continuous distribution; the criteria (necessary and sufficient conditions) for random variable to be of each pure type of probability distributions are found. We prove that “overwhelming” majority of these probability distributions are singular, i.e., they are concentrated on sets of zero Lebesgue measure (fractals). We describe topological and metric properties of the spectra of distributions of random variables as well as properties of their probability distribution functions.

Keywords: *expansions of numbers by positive Lüroth series, geometry of L -representation, absolutely continuous probability distribution, singular probability distribution, Lebesgue structure of probability distribution, orthogonal probability distributions.*

Ю. И. Жихарева, М. В. Працевитый

Свойства распределения случайной величины, L -символы которой в представлении знакоположительным рядом Люрота, независимы.

В работе изучается лебеговская структура, тополого-метрические и фрактальные свойства распределений случайных величин, представленных рядами Люрота (L -представлениями) по делениям своих “цифр” – L -представления и наоборот. Доказано, что случайная величина с независимыми

L -символами имеет или чисто дискретное, или чисто абсолютно непрерывное, или чисто сингулярно непрерывное распределение; найдены критерии принадлежности каждому из чистых типов. Доказано, что “подавляющее” большинство этих распределений является сингулярными, то есть сосредоточенными на множествах нулевой меры Лебега (фракталах). Описаны тополого-метрические свойства спектров распределений случайных величин, и свойства их функций распределения.

Ключевые слова: разложения чисел в знакоположительные ряды Люрота, геометрия L -представления, абсолютно непрерывное распределение, сингулярное распределение, лебеговская структура распределения, ортогональные распределения.

Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова
july2105@mail.ru
prats4@yandex.ru

Получено 14.12.11

УДК 531.39, 517.958

©2011. А. Л. Зуев, Ю. И. Кучер

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ

Статья посвящена исследованию сходимости метода Галеркина в задаче о колебаниях упругой балки. Построена последовательность приближенных решений и доказана ее сходимость к обобщенному решению начально-краевой задачи для уравнения Эйлера-Бернулли. Получена априорная оценка построенных решений. В заключение рассмотрен пример численного интегрирования аппроксимаций по Галеркину начально-краевой задачи с силой, зависящей от времени.

Ключевые слова: метод Галеркина, балка Эйлера-Бернулли, обобщенное решение.

1. Введение. Колебательные системы с распределенными параметрами широко используются при описании движения инженерных конструкций [1], таких как звенья упругих роботов-манипуляторов, башенные краны, антенны, приборные мачты космических аппаратов.

Распространенным подходом к моделированию динамики таких систем является метод Галеркина. Однако, вопрос о его сходимости остается открытым для задач управления механическими системами, состоящими из упругих элементов в виде балок и пластин.

В монографии [7] приведены результаты исследований устойчивости и стабилизации в виде обратной связи бесконечномерных систем, в частности, дифференциальных уравнений четвертого порядка, таких как уравнение колебаний балки Эйлера-Бернулли.

Статья [4] посвящена асимптотическому анализу систем связанных балок Эйлера-Бернулли и Тимошенко. В ней исследуются спектральные свойства семейства несамосопряженных операторов, порожденного системой уравнений движения связанных балок Эйлера-Бернулли и Тимошенко.

Установившиеся колебания балки Тимошенко исследованы в статье [6] с помощью методов Галеркина и наименьших квадратов.

В работе [8] рассматривается задача управления для балки Эйлера-Бернулли с одним закрепленным и одним свободным концом, на которую воздействует присоединенный пьезоэлектрический привод. Приведен закон управления с обратной связью и вычислена длина сенсора/привода, для которой имеет место сильная устойчивость, а также доказано убывание энергии к нулю с полиномиальным порядком для почти всех длин.

Авторы статьи [9] используют модель с нелокальным демпфированием, учитывающую временной и пространственный гистерезис, для систем, состоящих из балок Эйлера-Бернулли и пластин Кирхгофа. В цитируемой работе сила демпфирования представлена в виде взвешенного среднего поля скоростей в пространственной области.

В статье [10] получены и решены методом Галеркина уравнения равновесия, описывающие поведение пространственных изогнутых балок.

В работе [5] исследуются условия сходимости функций преобразования конечномерных аппроксимаций по Галеркину для задач управления механическими системами с распределенными параметрами.

Работа [11] посвящена исследованию вопроса о существовании предельных точек решений дифференциального уравнения, описывающего колебания упругой балки Эйлера-Бернулли с управлением в виде обратной связи.

В данной статье доказана сходимость метода Галеркина для модели балки Эйлера-Бернулли. Предложенная схема доказательства опирается на материал книги [2], в которой проведено обоснование сходимости метода Галеркина для уравнения колебаний струны.

Данная статья имеет следующую структуру. Во введении приводится краткий обзор литературы по рассматриваемой теме. Постановка задачи о колебаниях балки и основной результат работы – Утверждение 1 – приведены во втором разделе. В третьем разделе показан способ построения базисных функций для решения поставленной задачи методом Галеркина. В четвертом разделе описан процесс проектирования задачи на линейное многообразие, порожденное построенным базисом. В пятом разделе получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов разложения аппроксимаций по Галеркину. Шестой раздел содержит доказательство основного результата. В седьмом разделе проиллюстрированы результаты численного решения задачи. Выводы приведены в восьмом разделе.

2. Задача о колебаниях балки. Рассмотрим задачу о колебаниях упругой балки. Данный процесс описывается неоднородным дифференциальным уравнением (см. [1, с. 372]):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = f(x, t). \quad (1)$$

Здесь $w = w(x, t)$ – поперечная компонента перемещения балки, $x \in (0, l)$, $t \in (0, T)$, $f \in L^2((0, l) \times (0, T))$ – функция, описывающая внешнее силовое воздействие, $a^2 = EI/\rho > 0$, где I – момент инерции сечения балки, E – модуль Юнга, ρ – линейная плотность балки.

Предполагается, что один конец балки жестко закреплен, а второй свободен. То есть решение $w(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям [1, с. 382]:

$$w|_{x=0} = w_x|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$w_{xx}|_{x=l} = w_{xxx}|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

а также начальным условиям

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (4)$$

где $\varphi \in \overset{\circ}{H}^2(0, l) = \{\varphi \in H^2(0, l) : \varphi(0) = \varphi'(0) = 0\}$, $\psi \in L^2(0, l)$.

Все рассматриваемые в работе функции будем считать вещественнозначными.

Функцию $w(x, t) \in H^2((0, l) \times (0, T))$ будем называть обобщенным решением задачи (1)-(3), если для нее выполнены условия (2) и интегральное тождество

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt dx = \int_0^l \int_0^T f(x, t) v(x, t) dt dx \quad (5)$$

для любой пробной функции $v(x, t) \in \widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$, где

$$\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T)) = \{w \in H^2((0, l) \times (0, T)) : w|_{t=0} = w|_{t=T} = w|_{x=0} = w_x|_{x=0} = 0\}.$$

Для приближенного решения задачи (1)-(3) воспользуемся методом Галеркина. Предположим, что имеется семейство функций $v_k \in H^2(0, l)$, удовлетворяющих краевым условиям $v_k(0) = 0$, $v_k'(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим $V_m = \{c_1 v_1 + \dots + c_m v_m\} \subset L^2(0, l)$ – линейное многообразие, натянутое на функции v_1, \dots, v_m . Решение задачи (1)-(4) будем искать в виде

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) v_k(x), \quad (6)$$

где $c_k \in H^2(0, T)$, $k = \overline{1, m}$.

Функцию $w_m(x, t)$ будем называть приближенным по Галеркину решением порядка m задачи (1)-(4), если выполнено интегральное тождество

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w_m}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt dx = \int_0^l \int_0^T f(x, t) v(x, t) dt dx$$

для любой пробной функции вида $v(x, t) = v_k(x)q(t)$, $q \in \overset{\circ}{C}^1[0, T]$, $k = \overline{1, m}$.

Ниже приведен способ построения базисных функций $v_1(x), v_2(x), \dots$, для которых справедлив следующий результат о сходимости метода Галеркина.

Утверждение 1. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{H}^2(0, l)$, $\psi \in L^2(0, l)$ и пусть $w_m(x, t)$ – последовательность приближенных по Галеркину решений задачи (1)-(4), $m = 1, 2, \dots$. Тогда существует слабо сходящаяся подпоследовательность $w_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} w$, где w является искомым обобщенным решением задачи (1)-(4).

Доказательство этого утверждения проведено в разделе 6.

3. Построение базиса. Для решения задачи (1)-(4) методом Галеркина построим базисную в $H^2(0, l) \times (0, T)$ систему функций $v_1(x), v_2(x), \dots$ такую, что $v|_{x=0} = v_x|_{x=0} = 0$.

Пусть $c(t) \in C^2(0, T)$ и $v(x) \in C^4(0, l)$; $w(x, t) = c(t)v(x)$ – частное решение однородной задачи:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,$$

$$w|_{x=0} = w_x|_{x=0} = w_{xx}|_{x=l} = w_{xxx}|_{x=l} = 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{a^2 c(t)} \frac{d^2 c(t)}{dt^2} = \frac{1}{v(x)} \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \lambda = \text{const.}$$

Получим задачу Штурма-Лиувилля для $v(x)$:

$$\begin{cases} \frac{d^4 v}{dx^4} = \lambda v, & x \in (0, l), \\ v(0) = v'(0) = v''(l) = v'''(l) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Введем линейный дифференциальный оператор $A : D(A) \rightarrow L^2(0, l)$ следующим образом:

$$Aw(x) = \frac{d^4 w(x)}{dx^4}$$

и запишем задачу (7) в операторном виде:

$$\begin{aligned} Av(x) &= \lambda v(x), \quad x \in (0, l), \\ D(A) &= \{w \in H^2(0, l) : w(0) = w'(0) = w''(l) = w'''(l) = 0\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Существует обратный оператор $A^{-1} : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$,

$$A^{-1}v(x) = \int_0^x \int_0^y \int_\tau^l \int_z^l v(\xi) d\xi dz d\tau dy.$$

Лемма 1. *Оператор A^{-1} вполне непрерывный.*

Доказательство. Из неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\left(\int_x^l v(\xi) d\xi \right)^2 \leq \int_x^l d\xi \int_x^l v^2(\xi) d\xi = (l-x) \|v\|_{L^2(x,l)}^2 \leq l \|v\|_{L^2(0,l)}^2, \quad \forall v \in L^2(0, l). \quad (9)$$

Возьмем последовательность $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$, ограниченную в $L^2(0, l)$. Рассмотрим оператор $A_1 : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$, который зададим следующим образом:

$$A_1 v_n = \int_x^l v_n(\xi) d\xi.$$

Используя неравенство (9), оценим норму $\|A_1 v_n\|$ в пространстве $L^2(0, l)$:

$$\|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 = \int_0^l \left(\int_x^l v_n(\xi) d\xi \right)^2 dx \leq \int_0^l l \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2 dx = l^2 \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2. \quad (10)$$

Применяя (10), получим аналогичную оценку в пространстве $H^1(0, l)$:

$$\|A_1 v_n\|_{H^1(0, l)}^2 = \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq (l^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2. \quad (11)$$

Рассмотрим оператор $A_2 : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$, действующий по формуле

$$A_2 v_n = A_1(A_1 v_n) = \int_x^l \int_z^l v_n(\xi) d\xi dz,$$

и оценим норму $\|A_2 v_n\|$ в пространстве $H^1(0, l)$, используя полученную оценку (11):

$$\|A_2 v_n\|_{H^1(0, l)}^2 \leq (l^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^2 (l^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2.$$

Рассмотрим теперь оператор $A_3 : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$, заданный формулой

$$A_3 v_n = A_1(A_2 v_n) = \int_0^x \int_\tau^l \int_z^l v_n(\xi) d\xi dz d\tau,$$

воспользовавшись неравенствами (10) и (11), получим

$$\|A_3 v_n\|_{H^1(0, l)}^2 \leq (l^2 + 1) \|A_2 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^2 (l^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^4 (l^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2.$$

Рассмотрим оператор $A_4 : L^2(0, l) \rightarrow L^2(0, l)$, действующий следующим образом:

$$A_4 v_n = A_1(A_3 v_n) = \int_0^x \int_0^y \int_\tau^l \int_z^l v_n(\xi) d\xi dz d\tau dy.$$

Заметим, что $A_4 v_n = A^{-1} v_n$.

Применим (10) и (11) для оценки нормы $\|A_4 v_n\|$ в пространстве $H^1(0, l)$

$$\begin{aligned} \|A_4 v_n\|_{H^1(0, l)}^2 &\leq (l^2 + 1) \|A_3 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^2 (l^2 + 1) \|A_2 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq \\ &\leq l^4 (l^2 + 1) \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq l^6 (l^2 + 1) \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \end{aligned}$$

и в пространстве $H^4(0, l)$

$$\begin{aligned} \|A_4 v_n\|_{H^4(0, l)}^2 &= \|A_4 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \|A_3 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \|A_2 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \|A_1 v_n\|_{L^2(0, l)}^2 + \\ &+ \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2 \leq C \|v_n\|_{L^2(0, l)}^2, \end{aligned}$$

где $C = l^8 + l^6 + l^4 + l^2 + 1 > 0$.

Итак, $\|A^{-1}v_n\|_{H^4(0,l)}^2 \leq C\|v_n\|_{L^2(0,l)}^2$, значит оператор A^{-1} переводит ограниченную в $L^2(0,l)$ последовательность в ограниченную в $H^4(0,l)$ последовательность, а ограниченное в $H^4(0,l)$ множество является предкомпактным в $L^2(0,l)$. Таким образом, оператор A^{-1} переводит ограниченное в $L^2(0,l)$ множество в предкомпактное множество в $L^2(0,l)$. Следовательно, оператор A^{-1} вполне непрерывен. \square

Нетрудно проверить, что оператор A^{-1} самосопряженный. Тогда из леммы 1 и теоремы Гильберта-Шмидта следует, что собственные функции

$$v_1(x), v_2(x), \dots \quad (12)$$

оператора A^{-1} образуют ортогональный базис пространства $L^2(0,l)$.

Рассмотрим теперь сужение обратного к A оператора $A^{-1} : H^2(0,l) \rightarrow H^2(0,l)$. Аналогично приведенным выше рассуждениям, его собственные функции образуют ортогональный базис в пространстве $H^2(0,l)$, а по построению A^{-1} они совпадают с (12). Система функций (12) линейно независимая, полная в $\overset{\circ}{H}^2(0,l)$.

Множества собственных функций операторов A и A^{-1} совпадают, поэтому систему функций (12) будем искать как собственные функции задачи (7). Заметим, что собственные числа λ_n оператора A являются корнями трансцендентного уравнения [1, с. 382]:

$$\cos \sqrt[4]{\lambda_n} l \cosh \sqrt[4]{\lambda_n} l = -1. \quad (13)$$

Соответствующие собственные функции задачи (7) запишем в виде ([6]):

$$v_n(x) = c_{1n} \{ \cos(\sqrt[4]{\lambda_n} l) - \cos(\sqrt[4]{\lambda_n} x) \} + c_{2n} \{ \sin(\sqrt[4]{\lambda_n} l) - \sinh(\sqrt[4]{\lambda_n} x) \}. \quad (14)$$

Скалярное произведение в пространстве $\overset{\circ}{H}^2(0,l)$ зададим формулой

$$\langle f, g \rangle_{\overset{\circ}{H}^2(0,l)} = \int_0^l \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx. \quad (15)$$

Выберем константы c_{1n}, c_{2n} в формуле (14) таким образом, чтобы выполнялось условие нормированности для собственных функций:

$$\|v_k\|_{\overset{\circ}{H}^2(0,l)} = 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

4. Проекция задачи на конечномерное подпространство. Спроектируем начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на V_m :

$$\varphi^m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\langle \varphi, v_k \rangle_{L^2(0,l)}}{\|v_k\|_{L^2(0,l)}^2} \cdot v_k(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k v_k(x), \quad (17)$$

$$\psi^m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\langle \psi, v_k \rangle_{L^2(0,l)}}{\|v_k\|_{L^2(0,l)}^2} \cdot v_k(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k v_k(x), \quad (18)$$

тогда из (6) и (17) следует

$$w_m(x, 0) = \sum_{k=1}^m c_k(0)v_k(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k v_k(x), \quad (19)$$

откуда $c_k(0) = \varphi_k$ и

$$\dot{w}_m(x, 0) = \sum_{k=1}^m c'_k(0)v_k(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k v_k(x), \quad (20)$$

то есть $c'_k(0) = \psi_k$.

В интегральном тождестве (5) возьмем в качестве пробной функции $v(x, t) = v_k(x)q(t)$, где $v_k(x)$ – одна из найденных собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, $q(t)$ – некоторая функция пространства $\dot{H}^2(0, T)$:

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} v_k'' q - \frac{\partial w_m}{\partial t} v_k \dot{q} \right) dt dx = \int_0^l \int_0^T f v_k q dt dx.$$

Интегрирование по частям приводит к

$$\int_0^T q(t) \left[\int_0^l \left(a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} - f(x, t) \right) v_k(x) dx \right] dt = 0, \quad \forall q \in \dot{H}^2(0, T).$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления,

$$\int_0^l \left(a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \right) v_k(x) dx = \int_0^l f(x, t) v_k(x) dx, \quad k = \overline{1, m}, \quad (21)$$

для почти всех $t \in [0, T]$.

5. Построение уравнений относительно коэффициентов разложения по Галеркину. Будем искать такие функции $c_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, для которых выполнены начальные условия (19), (20) и интегральное тождество (21).

Подставим (6) в (21) и получим линейную относительно функций $c_1(t), \dots, c_m(t)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=1}^m \left(\ddot{c}_s(t) \langle v_s, v_k \rangle_{L^2(0, l)} + a^2 c_s(t) \langle v_s, v_k \rangle_{\dot{H}^2(0, l)} \right) = f_k(t), \quad k = \overline{1, m}, \quad (22)$$

где $f_k(t) = \int_0^l f(x, t) v_k(x) dx \in L^2(0, T)$.

Поскольку собственные функции, соответствующие различным собственным значениям оператора A , ортогональны, то система обыкновенных дифференциальных уравнений (22) имеет вид:

$$\ddot{c}_k(t)\|v_k\|_{L^2(0,l)}^2 + a^2 c_k(t) = f_k(t), \quad k = \overline{1, m}. \quad (23)$$

Положим

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \|v_1\|_{L^2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|v_2\|_{L^2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|v_m\|_{L^2}^2 \end{pmatrix}$$

и перепишем (23) в матричном виде:

$$\tilde{A} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_m(t) \end{pmatrix} = -a^2 \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$C(t) = (c'_1(t), \dots, c'_m(t), c_1(t), \dots, c_m(t))^T, \quad A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -a^2 \tilde{A}^{-1} \\ \hline I & 0 \end{array} \right),$$

$$F(t) = (\tilde{A}^{-1} \mid 0) (f_1(t), \dots, f_m(t) \mid 0)^T,$$

где I и 0 – единичная и нулевая матрицы соответствующей размерности, тогда задача (23), (19), (20) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} C'(t) &= AC(t) + F(t), \\ C(0) &= (\psi_1, \dots, \psi_m, \varphi_1, \dots, \varphi_m)^T. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку $f \in L^2((0, l) \times (0, T))$, то $F(t) \in L^2(0, T)$, следовательно,

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \in C(0, T).$$

Задачу (24) заменяем эквивалентной ей системой интегральных уравнений

$$C(t) = \int_0^t AC(\tau) d\tau + \int_0^t F(\tau) d\tau, \quad (25)$$

со свободным членом из $C(0, T)$. Существует единственное решение системы (25).

Тождество (21) умножим на $\dot{c}_k(t)$, проинтегрируем по $(0, \tau)$, где $\tau \in [0, T]$, просуммируем по $k = \overline{1, m}$. Получим

$$\int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \right) \frac{\partial w_m}{\partial t} dx dt = \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) \frac{\partial w_m}{\partial t} dx dt. \quad (26)$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 \right),$$

$$\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial w_m}{\partial t} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)^2 \right),$$

приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \right) \frac{\partial w_m}{\partial t} dx dt &= \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 + \left(a \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^l \left(a^2 \frac{d^2 \varphi^m(x)}{dx^2} + (\psi^m(x))^2 \right) dx, \end{aligned}$$

где $D_\tau = \{x \in (0, l), t = \tau\}$.

6. Доказательство сходимости последовательности приближенных решений к обобщенному решению задачи. Проведем доказательство Утверждения 1.

В пространстве $\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$ введем норму

$$\|w\|_{\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))}^2 = \int_0^l \int_0^T \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dt dx,$$

тогда

$$\begin{aligned} 2 \int_0^T \int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} \right) \frac{\partial w_m}{\partial t} dx dt d\tau &= \\ &= \|w_m\|_{\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))}^2 - T \int_0^l (a^2 \varphi^m(x)_{xx} + (\psi^m(x))^2) dx. \end{aligned}$$

Введем энергетическую функцию

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx.$$

Заметим, что

$$\left\| \frac{\partial w_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l \left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \right)^2 dx \leq 2\mathcal{E}(t) \quad (27)$$

и

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_0^l \left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial t} \right) dx = \int_0^l \frac{\partial w_m}{\partial t} f(x, t) dx.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского и (27)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \leq \left\| \frac{\partial w_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,l)} \|f\|_{L^2(0,l)} \leq \sqrt{2} \sqrt{\mathcal{E}(t)} \|f\|_{L^2(0,l)}. \quad (28)$$

Обозначим $\sqrt{2} \|f\|_{L^2(0,l)} \sqrt{\mathcal{E}(t)} = \Phi(t)$ и запишем уравнение сравнения для (28):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \Phi(t) \sqrt{\mathcal{E}(t)},$$

отсюда

$$\sqrt{\mathcal{E}(t)} = \sqrt{\mathcal{E}(0)} + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau,$$

где

$$\mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\left(\frac{\partial w_m}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \Big|_{t=0} \right)^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left((\psi(x))^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx.$$

В силу теоремы 4.1 [3, с. 40]:

$$\mathcal{E}(t) \leq \left(\sqrt{\mathcal{E}(0)} + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \right)^2, \quad (29)$$

что означает равномерную ограниченность функции $\mathcal{E}(t)$ по m .

Заметим, что

$$\|w_m\|_{\widehat{H}^2((0,l) \times (0,T))}^2 = \int_0^T \mathcal{E}(t) dt.$$

Таким образом, последовательность функций $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ сильно ограничена. Поскольку сильно ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно, то в $\{w_m\}_{m=1}^\infty$ существует слабо сходящаяся подпоследовательность. Не ограничивая общности, обозначим ее $\{w_m\}_{m=1}^\infty$, тогда $w_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} w$ слабо в $\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$,

где w – искомое обобщенное решение задачи (1)-(4). Для доказательства этого факта необходимо проверить для $w(x, t)$ выполнение интегрального тождества (5), в котором в качестве пробной функции возьмем

$$v(x, t) = v_k(x)q(t), \quad (30)$$

где $v_k(x)$ – одна из найденных собственных функций задачи (7), а $q(t) \in C^1[0, T]$ удовлетворяет условию $q(0) = q(T) = 0$.

По построению w_m :

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w_m}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - f v \right) dt dx = 0, \quad \forall m \geq k. \quad (31)$$

Запишем условие слабой сходимости:

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w_m}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - f v \right) dt dx &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - f v \right) dt dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Следовательно, в силу (31) и (32),

$$\int_0^l \int_0^T \left(a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - f v \right) dt dx = 0,$$

что означает выполнение (5) для $w(x, t)$.

Докажем теперь, что множество M , состоящее из линейных комбинаций функций (30), всюду плотно в $\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$. Для этого возьмем всюду плотное в $\widehat{H}^2((0, l) \times (0, T))$ множество, состоящее из непрерывных в прямоугольнике $[0, l] \times [0, T]$ функций $\eta(x, t)$, обращающихся в ноль на границе прямоугольника, и покажем, что любую функцию η можно аппроксимировать в метрике $H^2(0, l) \times (0, T)$ функциями из M , то есть $\|v_n - \eta\|_{H^2((0, l) \times (0, T))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, где $v_k \in M$.

Функции $\eta(x, t) \in C^2((0, l) \times (0, T))$ и $\eta_t(x, t) \in C^1((0, l) \times (0, T))$ можно разложить в ряды Фурье по системе функций (12):

$$\eta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) v_k(x), \quad (33)$$

$$\eta_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta'_k(t) v_k(x). \quad (34)$$

Поскольку для фиксированного $t \in [0, T]$ функции $\eta(\cdot, t)$ и $\eta_t(\cdot, t)$ лежат в пространстве $\mathring{H}^2(0, l)$, то их ряды Фурье будут сходиться к ним в метрике $\mathring{H}^2(0, l)$.

Заметим, что частная сумма $\eta^N = \sum_{k=1}^N \eta_k(t) v_k(x)$ ряда (33) есть элемент множества M ,

$$\eta_t - \eta_t^N \in \mathring{H}^2(0, l).$$

В силу неравенства Стеклова

$$\|\eta_t - \eta_t^N\|_{L^2(0, l)}^2 \leq C \|\eta_t - \eta_t^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2, \quad (35)$$

откуда согласно равенству Парсеваля

$$\begin{aligned} \|\eta_t - \eta_t^N\|_{L^2(0, l)}^2 + \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 &\leq C \|\eta_t - \eta_t^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 + \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} C(\eta_k')^2 + \eta_k^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (36)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|\eta_t - \eta_t^N\|_{L^2(0, l)}^2 + \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \\ \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2((0, l) \times (0, T))}^2 &= \int_0^l \int_0^T \left((\eta_t - \eta_t^N)^2 + a^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta^N}{\partial x^2} \right)^2 \right) dt dx = \\ &= \int_0^T \left(\|\eta_t - \eta_t^N\|_{L^2(0, l)}^2 + a^2 \|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2(0, l)}^2 \right) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (37)$$

откуда

$$\|\eta - \eta^N\|_{\mathring{H}^2((0, l) \times (0, T))}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Утверждение доказано.

7. Численное моделирование. На рис. 1 показаны результаты численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (23), соответствующие приближенным решениям начально-краевой задачи (1)-(4) в момент времени $t = 2$ с для таких значений механических параметров: длина балки $l = 1$ м, начальная скорость равна нулю ($\psi(x) \equiv 0$), коэффициент $a^2 = 100 \frac{\text{Нм}^3}{\text{кг}}$, что характерно, например, для алюминиевой балки с круговым сечением диаметра приблизительно 5,5 мм.

Для иллюстрации начальная функция

$$\varphi(x) = -\frac{g}{24a^2}x^4 + \frac{gl}{6a^2}x^3 - \frac{gl^2}{4a^2}x^2$$

выбрана из условия равновесия балки в поле силы тяжести. Силы, действующие на балку, представимы в виде функции

$$f(x, t) = -g + (1 - e^{-\lambda t})\chi_{[l-h, l]}(x),$$

где $\chi_{[l-h, l]}(x)$ – индикатор отрезка $[l - h, l]$, $u(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ – управление. Такая функция $f(x, t)$ соответствует балке, к свободному концу которой на отрезке длины h приложена управляющая сила, направленная вертикально вверх таким образом, что при $t \rightarrow +\infty$ эта сила компенсирует вес балки. При расчете выбраны значения параметров $\lambda = 1$, $h = 0,1$ м.

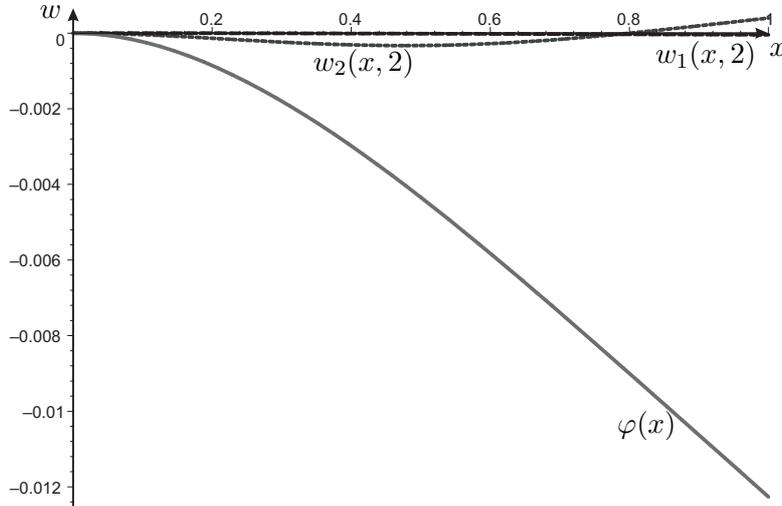


Рис. 1. Форма прогиба балки

Из рисунка видно, что приближенные решения по Галеркину достаточно близки к нулю при всех $x \in (0, l)$. При этом графики функций $w_2(x, 2), \dots, w_{20}(x, 2)$ практически совпадают, что подтверждает быструю сходимость метода Галеркина для задачи (1)-(4).

8. Заключение. Важным этапом доказательства утверждения является получение оценки энергии на решениях (29). Поскольку эта оценка является равномерной по t , формула (29) может быть использована при изучении приближенных по Галеркину решений любого порядка.

Дальнейший интерес представляет исследование задач с более общими краевыми условиями, в частности, колебания балки, связанной с твердым телом, или балки с точечной массой на конце.

1. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
3. Хартманн Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1970. – 720 с.
4. Balakrishnan A.V., Shubov M.A., Peterson Ch.A. Spectral Analysis of Coupled Euler–Bernoulli and Timoshenko Beam Model // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2004. – Vol. 84, No. 5. – P. 291-313.
5. Gorinevsky D.M. Galerkin approximation in modeling of controlled distributed-parameter flexible systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1993. – Vol. 106, Issues 1-2. – P. 107-128.

6. *Grosh K., Pinsky P.M.* Design of Galerkin Generalized Least Squares Methods for Timoshenko Beams // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – Vol. 132. – P. 1-16.
7. *Luo Zh.H., Guo B.Zh., Morgul O.* Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications. – London: Springer-Verlag, 1999. – 403 p.
8. *Le Gall P., Prieur C., Rosier L.* Output Feedback Stabilization of a Clamped-Free Beam // International Journal of Control. – 2006. – Vol. 00, No. 00. – P. 1-24.
9. *Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S.* A Galerkin method for distributed systems with non-local damping // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 3381–3400.
10. *Rosen A., Abramovich H.* Galerkin method as a tool to investigate the planar and non-planar behavior of curved beams // Computers and Structures. – 1984. – Vol. 18, Issue 1. – P. 165-174.
11. *Зуев А.Л.* Локализация предельного множества траекторий уравнения Эйлера–Бернулли с управлением // Украинский математический журнал. – 2008. – Т. 60, № 2. – С. 173-182.

A. L. Zuyev, J. I. Kucher

Convergence of the sequence of approximate solutions for dynamic equations of a flexible beam.

This paper is devoted to the investigation of the Galerkin's method convergence for the flexible beam vibrations problem. A sequence of approximate solutions is constructed and its convergence to the generalized solution of the initial-boundary value problem for the Euler-Bernoulli beam equation is proved. An a priori estimate of the obtained solutions is presented. In conclusion, an example of the numerical integration of Galerkin's approximations of the initial-boundary value problem with a time-varying force is considered.

Keywords: *Galerkin's method, Euler-Bernoulli beam, generalized solution.*

О. Л. Зуев, Ю. І. Кучер

Збіжність послідовності наближених розв'язків динамічних рівнянь пружної балки.

Статтю присвячено дослідженню збіжності методу Гальоркіна в задачі про коливання пружної балки. Побудовано послідовність наближених розв'язків і доведено її збіжність до узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для рівняння Ейлера-Бернуллі. Отримано апріорну оцінку побудованих розв'язків. У заключній частині роботи розглянуто приклад чисельного інтегрування апроксимацій за Гальоркіним початково-крайової задачі з силою, що залежить від часу.

Ключові слова: *Метод Гальоркіна, балка Ейлера-Бернуллі, узагальнений розв'язок.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
al_zv@mail.ru
julykucher@gmail.com

Получено 01.12.11

УДК 681.5:51-74

©2011. А. А. Иванова

3-D МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО СЛИТКА

Представлена трехмерная математическая модель нестационарного температурного поля непрерывнолитой заготовки и стенок кристаллизатора. Модель учитывает зависимости теплофизических параметров от температуры, наличие зазора между поверхностью слитка и стенкой кристаллизатора, характер водяного охлаждения кристаллизатора, зависимость граничных условий от конфигурации и режимов работы зоны вторичного охлаждения. Положение границы раздела фаз определяется из условий Стефана. Задача численно решена методом конечных разностей. Представлены и проанализированы результаты расчетов.

Ключевые слова: непрерывная разливка, кристаллизатор, вторичное охлаждение, температурное поле слитка, условия Стефана, конечно-разностная аппроксимация.

1. Введение. В настоящее время ведется интенсивная разработка систем автоматического управления (САУ) машинами непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Одним из наиболее перспективных направлений является создание САУ МНЛЗ на основе достаточно нового метода управления – прогнозного управления (в иностранных источниках МВРС – model based predictive control или МРС – model predictive control, существует российский вариант перевода МРС – управление с прогнозирующими моделями [1]).

Прогнозное управление – основанный на математическом моделировании метод управления, при котором решается задача выбора значений управляющих параметров, обеспечивающих прогноз состояния системы, максимально близкий к заданному.

Этот подход начал развиваться в начале 60-х годов для управления процессами и оборудованием в нефтехимическом и энергетическом производстве [1]. В настоящее время сфера применения МРС-методов стремительно расширяется, охватывая разнообразные технологические процессы в химической и строительной индустрии, легкой и пищевой промышленности, в аэрокосмических исследованиях, в современных системах энергетики и т. д. Разработка математических моделей для моделирования технологического процесса непрерывной разливки в режиме реального времени позволит внедрить прогрессивные технологии, использующие метод прогнозного управления в САУ металлургическими процессами, в том числе процессами непрерывной разливки.

Поскольку измерять температурное поле затруднительно, а данные измерений могут быть заменены расчетами по математической модели, математическое моделирование процесса кристаллизации непрерывного слитка является постоянным предметом внимания не только разработчиков САУ, но и многих других исследователей. Для определения температурного поля слитка разработано достаточно большое число различных по уровню сложности математических моделей [2]. Суще-

ствуют одномерные [3], двумерные [4, 5, 6], трехмерные [7, 8], стационарные [2] и нестационарные [5], с учетом [5] или без учета [3] конвективного переноса теплоты, с определением или без определения положения границы фазового перехода [2] и т.д. В [8] представлена трехмерная нестационарная модель для слитка квадратного сечения, где теплоперенос вместе с движущейся средой учтен с помощью наличия в уравнении дополнительного слагаемого – условного источника тепла. В [9] разработана нестационарная математическая модель процесса конвективно-кондуктивного переноса теплоты в непрерывном слитке, рассматривающая двумерное температурное поле и границу раздела фаз непрерывного слитка криволинейной МНЛЗ в продольном сечении широкого сляба, которое параллельно узким граням и проходит через середину широких граней.

Вычислительные возможности, появившиеся в последнее время, позволяют разрабатывать сложные математические модели, учитывающие всё большее число факторов, которые могут существенным образом влиять на процесс и создавать более универсальные модели.

В данной работе разработана математическая модель нестационарного теплового процесса в непрерывном слитке. Модель включает в себя уравнения теплопередачи внутри стенок кристаллизатора. Модель учитывает зависимость теплофизических параметров от температуры металла, характер теплоотдачи от слитка через стенки кристаллизатора к охлаждающей воде, расположение опорно-приводных роликов в зоне вторичного охлаждения (ЗВО), расположение форсунок, подающих водовоздушную смесь, а также зависимость теплоотдачи от режимов работы ЗВО.

2. Математическая модель температурного поля кристаллизатора. Процесс рассматривается в системе координат, привязанной к конструкции МНЛЗ (рис. 1). Конвективно-кондуктивный перенос теплоты в непрерывном слитке описывается нелинейным нестационарным уравнением в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} + v(\tau) \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial z} = \\ = \frac{1}{c(T)\rho(T)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < y < w, \quad 0 < z < Z,$$

где $T(\tau, x, y, z)$ – температура металла, $v(\tau)$ – скорость вытягивания слитка, $2l$ – толщина слитка, $2w$ – ширина слитка, Z – высота слитка в кристаллизаторе, $c(T)$ – удельная теплоёмкость металла, $\rho(T)$ – плотность металла, $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности.

Положение границы между жидкой и твердой фазами металла (границы раздела фаз) задаётся следующими условиями:

– условие равенства температур:

$$T|_{x=\xi-} = T|_{x=\xi+} = T_{kr}, \quad (2)$$

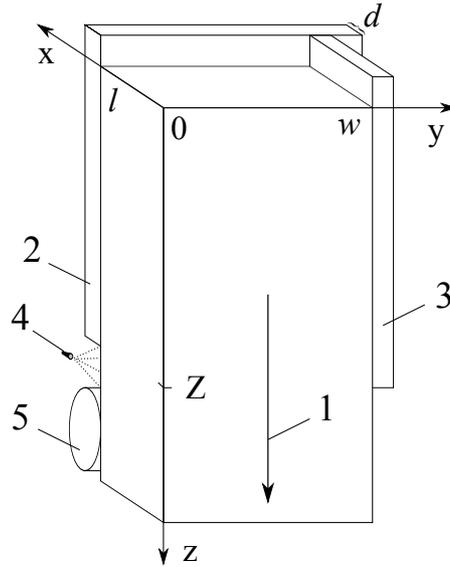


Рис. 1. Система координат относительно рассматриваемой области. 1 – направление движения слитка, 2 – широкая стенка кристаллизатора, 3 – узкая стенка кристаллизатора, 4 – форсунки, подающие водо-воздушную смесь, 5 – опорно-приводные ролики.

– условие Стефана:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi^-} - \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi^+} = \mu \rho_{kr} \left(v(\tau) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right), \quad (3)$$

где ξ – граница раздела фаз, μ – скрытая теплота кристаллизации, T_{kr} – температура кристаллизации (средняя из интервала ликвидус – солидус), \bar{n} – нормаль к поверхности раздела фаз.

Задаются начальное положение границы раздела фаз:

$$\xi(0, y, z) = \xi_0(y, z) \quad (4)$$

и «граничное» условие для функции ξ :

$$\xi(\tau, y, z)|_{(z=0)} = \xi(y). \quad (5)$$

Предполагается, что охлаждение симметрично. Следовательно, можно записать для осевых продольных сечений слитка граничные условия, означающие равенство нулю тепловых потоков:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (6)$$

При разливке под шлаком тепловой поток от зеркала расплава считается равным нулю:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (7)$$

Граничные условия на поверхности слитка внутри кристаллизатора формулируются с учетом наличия зазора между слитком и стенками кристаллизатора. Зазор образуется за счет шероховатостей поверхности слитка и внутренней поверхности кристаллизатора. Частично он заполнен шлаковым гарнисажем, частично – газовыми включениями. Поскольку представить величину и содержимое зазора в виде распределенных параметров не представляется возможным, вводятся так называемые эффективные (осреднённые) величина зазора и коэффициент теплопроводности. Граничные условия на поверхности слитка вдоль широкой грани имеют вид:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\lambda_g}{\delta} (T|_{x=l+\delta} - T|_{x=l}) + \sigma_n \left[\left(\frac{T|_{x=l+\delta}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=l}}{100} \right)^4 \right], \quad (8)$$

где δ – эффективная толщина зазора между поверхностью слитка и стенкой кристаллизатора, λ_g – коэффициент теплопроводности смеси шлакового гарнисажа и воздуха в зазоре, $T|_{x=l}$ – температура поверхности слитка, $T|_{x=l+\delta}$ – температура касающейся слитка поверхности стенки кристаллизатора, σ_n – приведённый коэффициент излучения. Аналогично формулируются условия для узкой грани слитка.

Уравнение теплопроводности в стенке кристаллизатора:

$$\frac{\partial T(\tau, x, z)}{\partial \tau} = \frac{1}{c_m(T)\rho_m(T)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_m(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_m(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}, \quad (9)$$

$$z_0 < z < Z, \quad l + \delta < x < d.$$

Граничные условия для стенки кристаллизатора задаются следующим образом:

– на поверхности кристаллизатора, обращенной к воде:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d} = \alpha_1 (T_v(\tau) - T|_{x=d}), \quad z_0 \leq z \leq Z, \quad (10)$$

– на верхней и нижней поверхностях:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=Z} = \alpha_2 (T_{os.2} - T|_{z=Z}), \quad l + \delta \leq x \leq d, \quad z = Z, \quad (11)$$

$$- \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \alpha_3 (T_{os.3} - T|_{z=z_0}), \quad l + \delta \leq x \leq d, \quad z = z_0, \quad (12)$$

– теплопередача между поверхностью слитка и внутренней поверхностью стенки кристаллизатора:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l+\delta} = \frac{\lambda_{gz}}{\delta} (T|_{x=l+\delta} - T|_{x=l}) + \sigma_n \left[\left(\frac{T|_{x=l+\delta}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=l}}{100} \right)^4 \right], \quad (13)$$

$$0 \leq z \leq Z, \quad x = l + \delta,$$

– на внутренней поверхности стенки кристаллизатора над уровнем расплава:

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l+\delta} = \alpha_4 (T_{os.1} - T|_{x=d}) + C_n \left[\left(\frac{T_{os.1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=d}}{100} \right)^4 \right], \quad (14)$$

$$z_0 \leq z \leq 0, \quad x = l + \delta,$$

где $d = (l + \delta)$ – толщина стенки кристаллизатора, z_0 – высота стенки кристаллизатора над уровнем расплава, α_1 – коэффициент теплоотдачи от стенки кристаллизатора к охлаждающей воде, $T_v(\tau, z)$ – температура охлаждающей воды в канале кристаллизатора, $\alpha_{2,3,4}$ – коэффициент теплоотдачи от стенки кристаллизатора в окружающую среду, $T_{os.2,3,4}$ – температура окружающей среды, C_n – приведенный коэффициент излучения.

Балансовое уравнение описывает распределение температуры охлаждающей воды в канале кристаллизатора:

$$c \cdot S \cdot v_v \frac{\partial T_v(\tau, z)}{\partial z} = P_I \alpha_1 (T_v(\tau, z) - T|_{x=d}) - P_E \alpha_E (T_v(\tau, z) - T_E), \quad (15)$$

где c – объемная теплоемкость воды, S – площадь сечения канала кристаллизатора, v_v – скорость движения воды в канале, P_I – периметр внутренней стенки канала, P_E – периметр внешней стенки канала, α_E – коэффициент теплопередачи между охлаждающей водой и внешней стенкой кристаллизатора, T_E – температура внешней стенки кристаллизатора.

Известно значение температуры на входе в канал кристаллизатора в любой момент времени:

$$T_v(0, Z) = T_{v1}(\tau) \quad (16)$$

и распределение температуры в канале кристаллизатора в начальный момент времени:

$$T_v(0, z) = T_{v0}(z). \quad (17)$$

Из кристаллизатора затвердевшая по периметру заготовка вытягивается в зону вторичного охлаждения (ЗВО), где продолжается интенсивный отбор тепла до окончательного затвердевания. В ЗВО слиток поддерживается опорно-приводными роликами, которые изнутри охлаждаются водой, и в местах контакта с поверхностью слитка отбирают на себя часть тепла:

$$\lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = \alpha_r(z) (T|_r - T|_{x=l}) + C_r (T_r^4 - (T|_{x=l})^4), \quad (18)$$

где $\alpha_r(z)$ – коэффициент конвективной теплоотдачи от поверхности слитка к ролику, $T_{o.c.}$ – температура поверхности ролика, C_r – приведённый коэффициент лучистого теплообмена между поверхностью слитка и роликом.

В промежутках между роликами установлены форсунки, распыляющие на поверхность слитка водо-воздушную смесь. Форсуночное охлаждение является основным инструментом отбора тепла от непрерывного слитка, а его режимы существенным образом влияют на качество производимого металла.

Теплоотдача по широкой грани под воздействием принудительного охлаждения водо-воздушной смесью формулируется в виде граничных условий третьего рода:

$$\lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = \alpha(\vec{t}, \vec{k}, \vec{G}, \vec{p}) \cdot (T_{o.c.} - T|_{x=l}) + C_n (T_{o.c.}^4 - (T|_{x=l})^4), \quad (19)$$

где α – коэффициент конвективной теплоотдачи, \vec{t} – вектор, определяющий типы форсунок, \vec{k} – координаты форсунок, \vec{G} – расходы охлаждающей воды, \vec{p} – давление воздуха, $T_{o.c.}$ – температура окружающей среды, l – полутолщина слитка, C_n – приведённый коэффициент излучения. Аналогично задаются граничные условия для узкой грани. Форсунки вдоль узкой грани (рис. 1) устанавливаются на уровнях, близких к кристаллизатору. На участках, не накрываемых факелом форсунки, коэффициент конвективной теплоотдачи считается равным константе. Аналогично записываются условия теплоотдачи по узкой грани слитка.

3. Конечно-разностная аппроксимация поставленной задачи. Конечно-разностная аппроксимация и алгоритм нахождения неизвестной границы аналогичны представленным в [9, 10] для двумерной модели. Отличие состоит в том, что уравнение (1) трехмерной модели содержит дополнительное слагаемое и в недивергентной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} + v(\tau) \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial z} = \frac{1}{c(T)\rho(T)} \left\{ \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Этому уравнению соответствует конечно-разностный аналог:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{k+1,i,j,p} - T_{k,i,j,p}}{\Delta\tau} + v_k \frac{T_{k,i,j,p} - T_{k,i,j,p-1}}{\Delta z} = \frac{1}{c(T_{k,i,j,p})\rho(T_{k,i,j,p})} \times \\ & \times \left\{ \lambda(T_{k,i,j,p}) \frac{T_{k,i-1,j,p} - 2T_{k,i,j,p} + T_{k,i+1,j,p}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{k,i,j,p} - T_{k,i-1,j,p}}{(\Delta x)^2} + \right. \\ & + \lambda(T_{k,i,j,p}) \frac{T_{k,i,j-1,p} - 2T_{k,i,j,p} + T_{k,i,j+1,p}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{k,i,j,p} - T_{k,i,j-1,p}}{(\Delta y)^2} + \\ & \left. + \lambda(T_{k,i,j,p}) \frac{T_{k,i,j,p-1} - 2T_{k,i,j,p} + T_{k,i,j,p+1}}{(\Delta z)^2} + \frac{T_{k,i,j,p} - T_{k,i,j,p-1}}{(\Delta z)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где i, j, p – номера точек разностной сетки по пространственным координатам x, y, z (соответственно), k – номера точек разностной схемы по времени.

Отсюда следует условие устойчивости для выбранной явной схемы:

$$\Delta\tau \leq \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2(\Delta z)^2 \cdot c_{min} \cdot \rho_{min}}{v_{max} \cdot c_{max} \cdot \rho_{max} \cdot (\Delta x)^2(\Delta y)^2\Delta z + 2\lambda_{max} \cdot B},$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – шаги разностной сетки по пространственным координатам x, y, z (соответственно), $v_{max}, c_{max}(c_{min}), \rho_{max}(\rho_{min}), \lambda_{max}$ – максимальные (или минимальные) из заданных в условиях задачи значения скорости вытягивания непрерывнолитой заготовки, теплоёмкости, плотности и теплопроводности разливаемой марки стали, $B = (\Delta y)^2(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2(\Delta y)^2$.

4. Результаты расчетов. Для расчетов было разработано программное обеспечение, которое позволяет производить оценку температурного состояния слитка. Результаты дают представление о распределении температур и толщине твердой корочки в различных сечениях заготовки. Температура и положение границы раздела фаз отображаются в виде цветовых диаграмм (рис. 2) и различных графиков.

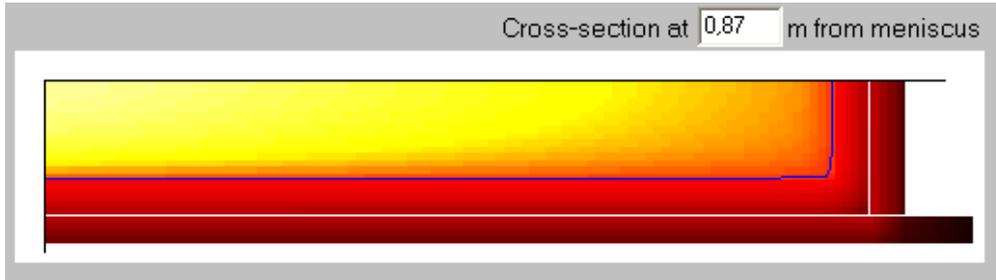


Рис. 2. Температура слитка и стенок кристаллизатора и положение границы раздела фаз в поперечном сечении.

На рис. 3 представлена температура поверхности слитка внутри кристаллизатора. Результаты моделирования показывают, что при заданной конструкции кристал-

лизатора температура в углах слитка снижается существенно быстрее, чем на всей остальной поверхности слитка, что полностью соответствует данным, полученным в промышленных условиях. Таким образом, данная математическая модель может быть использована для проектирования кристаллизаторов и ЗВО.

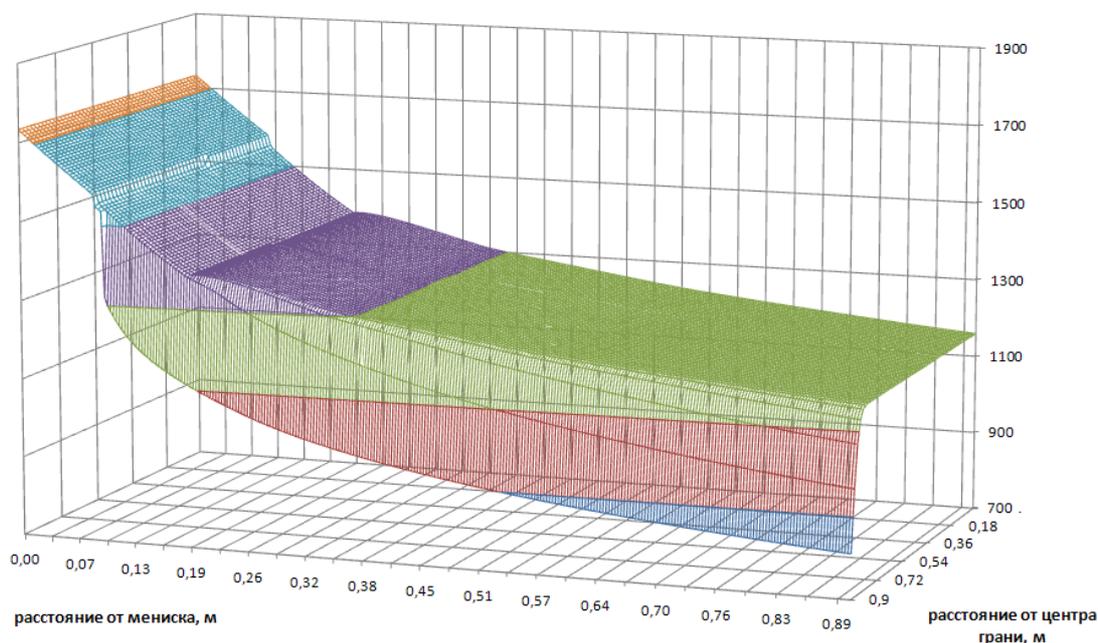


Рис. 3. Температура поверхности широкой грани слитка внутри кристаллизатора.

График распределения температуры поверхности слитка по широкой грани в зоне вторичного охлаждения (ЗВО) представлен на рис. 4. Температура в месте контакта слитка с опорно-приводными роликами снижается практически равномерно вдоль всей линии касания ролика. В зоне подбоя (первые два уровня форсунок) производится наиболее интенсивное охлаждение с целью недопущения разрыва твёрдой корочки слитка. Поэтому здесь можно видеть снижение температуры и в углах слитка, где, вообще говоря, это нежелательно. Третий уровень форсунок допускает возможность их оптимальной расстановки по ширине. Таким образом, в этой зоне возможно избежать дополнительно чрезмерного охлаждения углов слитка, что и показано на рис. 4.

5. Выводы. Представленная трехмерная математическая модель нестационарного температурного поля непрерывнолитой заготовки и стенок кристаллизатора позволяет производить оценку температурного состояния слитка в различные моменты времени для заданных конструкции кристаллизатора и ЗВО, марки разливаемой стали, скоростей вытягивания слитка и режимов охлаждения. Модель и соответствующее разработанное программное обеспечение могут быть использованы для проектирования конструкций машин непрерывного литья заготовок (МНЛЗ), для имитационного моделирования на этапе синтеза систем автоматического управления

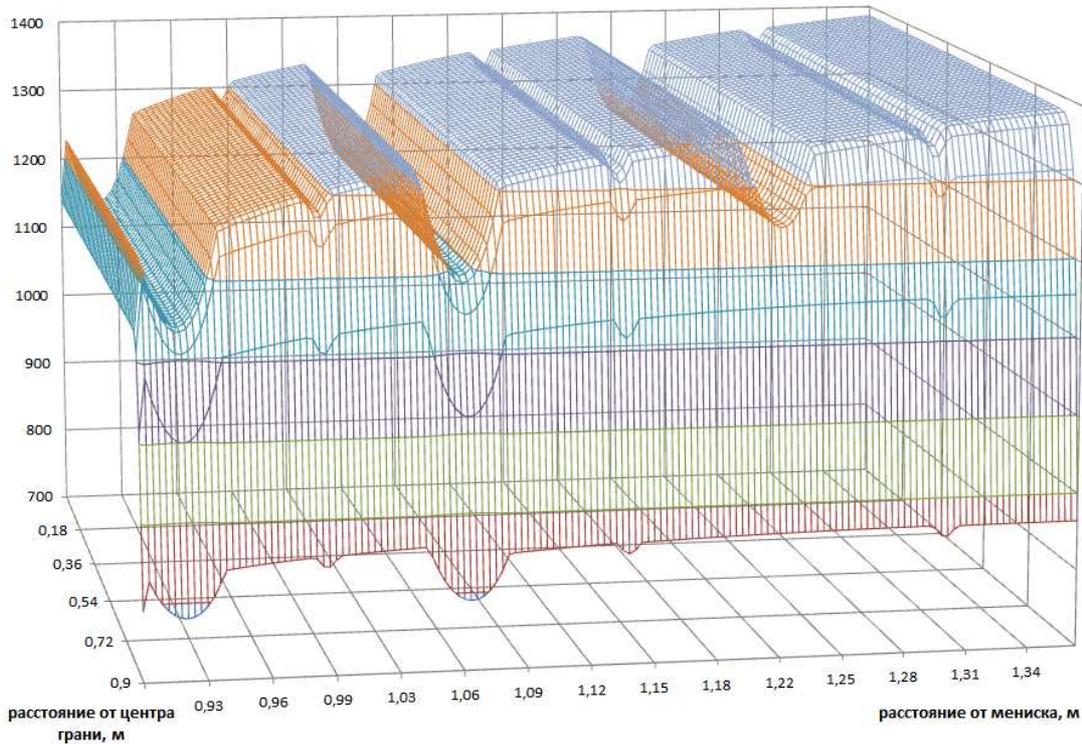


Рис. 4. Температура поверхности широкой грани слитка в ЗВО.

(САУ), а также в процессе функционирования САУ МНЛЗ.

1. *Веремей Е.И., Еремеев В.В.* Введение в задачи управления на основе предсказаний. – [Электронный ресурс] <http://matlab.exponenta.ru/modelpredict/book1/0.php>.
2. *Авдонин Н.А.* Математическое описание процессов кристаллизации. – Рига : Зинатне, 1980. – 224 с.
3. *Bakhanovich S.V., Borukhov V.T., Timoshpol'skii V.I. et al.* Computational analysis of the regimes of solidification and cooling of a continuous casting with a circular cross section // J. of Engineering Physics and Thermalphysics. – 2007. – Vol. 80, No. 2. – P. 213–219.
4. *Лисценко В.Г., Лобанов В.И., Китаев Б.И.* Теплофизика металлургических процессов. – М. : Металлургия, 1982. – 239 с.
5. *Hardin R.A., Liu K., Kapoor A., Beckermann C.* A Transient Simulation and Dynamic Spray Cooling Control Model for Continuous Steel Casting // Metallurgical and Materials Trans. B, 2003. – Vol. 34, No 3. – P. 297–306.
6. *Hongming W., Li G., Lei Y. et al.* Mathematical Heat Transfer Model Research for the Improvement of Continuous Casting Slab Temperature // ISIJ Int. 2005. – Vol. 45, No. 9. – P. 1291–1296.
7. *Nowak I., Smolka J., Nowak A.J.* A reproduction of boundary conditions in three-dimensional continuous casting problem. World Academy of Science, Engineering and Technology 43 2008. – P. 243-248.
8. *Janik M., Dyja H.* Modelling of three-dimensional temperature field inside the mould during continuous casting of steel / Journal of Materials Processing Technology 157–158 (2004) 177–182.
9. *Ткаченко В.Н., Иванова А.А.* Моделирование и анализ теплового поля непрерывного слитка криволинейной машины непрерывного литья заготовок // Электронное моделирование. – 2008.

– Т. 30, № 3. – С. 87–103.

10. *Иванова А.А.* Математическая модель процесса затвердевания непрерывного слитка в зоне вторичного охлаждения // Труды ИПММ НАН Украины. – Вып. 12. – Донецк. – 2006. – С. 76-84.

Ganna Ivanova

3-D mathematical model of temperature field of continuous ingot.

The three-dimensional mathematical model of nonstationary temperature field of continuous ingot and mold walls is presented. Model takes into account dependence of thermophysical parameters on the temperature, the presence of the gap between the surface of the ingot and the mold wall, the mode of mold water-cooling, the dependence of the boundary conditions on the configuration and modes of the secondary cooling system. The position of the interface is determined from the Stefan condition. The numerical solution of the problem is performed by the finite-difference method. The results of numerical solution are presented and analysed.

Keywords: *continuous casting, mold, secondary cooling, temperature field of ingot, Stefan condition, finite-difference approximation.*

Г. О. Иванова

3-D математична модель температурного поля безперервного злитка.

Представлена тривимірна математична модель нестационарного температурного поля безперервно-ливої заготовки й стінок кристалізатора. Модель враховує залежність теплофізичних параметрів від температури, наявності зазору між поверхністю злитка й стінкою кристалізатора, характер водяного охолодження кристалізатора, залежність граничних умов від конфігурації й режимів роботи зони вторинного охолодження. Положення межі розподілу фаз визначається умовами Стефана. Задачу чисельно розв'язано методом кінцевих різниць. Представлено і проаналізовано результати розрахунків.

Ключові слова: *безперервне розливання, кристалізатор, вторинне охолодження, температурне поле злитка, умови Стефана, скінченно-різницева апроксимація.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
anna.iwanova@ukr.net

Получено 21.11.11

УДК 517.5

©2011. А. Ю. Иванов

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ БОРСУКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Рассматривается задача о разбиении фигур на части меньшего диаметра в многомерных пространствах. Существенно расширен класс множеств, для которых имеет место гипотеза К. Борсука.

Ключевые слова: выпуклое множество, фигура постоянной ширины, опорная функция, диаметр, разбиение множеств на части меньшего диаметра.

1. Введение. Пусть $|\cdot|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^n . Для непустого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ величина $diam M = \sup_{x,y \in M} |x - y|$ называется диаметром M .

Толчком в развитии проблематики разбиения фигур на меньшие части можно, по-видимому, считать беседу, состоявшуюся в 1914г., между Анри Лебегом и венгерским математиком Палом, в ходе которой Лебег сформулировал известную задачу о нахождении универсальной покрывки наименьшей площади [1]. Затем в 1920г. Пал опубликовал свои результаты разработки данной задачи. Среди них была лемма:

Лемма 1.1. *Всякая плоская фигура диаметра d может быть заключена в правильный шестиугольник, у которого расстояние между параллельными сторонами равно d .*

После этого польский математик Кароль Борсук заметил, что такой правильный шестиугольник можно разбить на 3 части, каждая из которых имеет диаметр меньший d . Кроме этого, в 1932г. Борсук доказал, что n -мерный шар нельзя разбить на n частей, обладающих таким же свойством. Видимо именно эти два факта привели к тому, что в 1933г. К. Борсук выдвинул гипотезу о том, что всякое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ можно разбить на $n + 1$ часть, диаметра меньшего $diam G$ [2, гл. 1, § 3].

С этого момента проблема Борсука заняла место одной из центральных задач комбинаторной геометрии. Постепенно появилась целая плеяда родственных задач, среди которых, и известная проблема освещения, и проблема покрытия гомотетическими телами, решение которых во многом связано с проблемой Борсука. Ею занимались такие известные математики как Хадвигер, Болтянский, Данцер и многие другие.

Процесс выхода из плоскости дался довольно тяжело. Только в 1955г. Эглстон подтвердил данную гипотезу в \mathbb{R}^3 , затем спустя два года этот результат повторили одновременно Грюнбаум и Хеппеш [3, гл. 5, § 23]. Однако, предложенные ими методы не давали возможности решить ее в пространствах большей размерности.

Тем не менее, справедливость гипотезы никто не подвергал сомнению, считалось, что подтверждение ее для произвольных размерностей это лишь вопрос времени. Так продолжалось вплоть до 1993г., когда Джефф Канн и Гил Калаи построили первый контрпример к гипотезе [4]. Они показали, что в размерности 2014 суще-

ствует тело, для которого предположение Борсука не верно. К настоящему моменту русским математиком Райгородским показано, что такие контрпримеры существуют во всех размерностях больших 135 [5, гл. 4, п. 4.3].

Таким образом, на первый план выходит вопрос описания множеств, для которых данное разбиение все-таки имеет место. Первым результатом в этом направлении является теорема, полученная Г. Хадвигером в 1946г. [6].

Теорема 1.1. *Каждое выпуклое ограниченное тело из \mathbb{R}^n , имеющее гладкую границу, можно разбить на $n + 1$ часть меньшего диаметра.*

Из этого утверждения видно, что наибольшую трудность, в плане разбиения на части меньшего диаметра, создают именно нерегулярные точки на границе множества.

В 1952г. Андерсон и Кли получили ограничения на множества с негладкой границей [7]. Они показали, что если каждая точка нерегулярности удовлетворяет определенным, достаточно сильным условиям, то такое множество действительно можно разбить на $n + 1$ часть меньшего диаметра. А в 1960г. В.Г. Болтянский выявил зависимость положительного решения проблемы Борсука от количества особых точек границы данного множества [8]. Он показал, что в случае, когда таких точек не более n , то для множества из \mathbb{R}^n гипотеза имеет место. На данный момент эти два результата являются наиболее сильными.

В данной работе получены усиления результатов В.Г. Болтянского [8] и Андерсона, Кли [7]. Показано, что гипотеза Борсука имеет место для всех фигур постоянной ширины из \mathbb{R}^n , у которых множество точек нерегулярности удовлетворяет определенным ограничениям.

Наличие следующего утверждения в теории выпуклых множеств указывает на достаточность рассмотрения гипотезы Борсука только для класса замкнутых фигур постоянной ширины [3, теорема 24.1].

Теорема 1.2. *Пусть $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество, тогда $\exists G \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины равной $\text{diam}\tilde{G}$ такая, что $\tilde{G} \subseteq G$.*

2. Формулировка основного результата. Определим функцию $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, где \mathbb{Z}_+ – множество неотрицательных целых чисел, G – фигура постоянной ширины, следующим образом. Для $x \in G$ положим $\chi(x)$ равной количеству диаметров фигуры G , проходящих через точку x . Если множество таких диаметров бесконечно, будем обозначать $\chi(x) = \infty$. Введем также функцию $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial G$, где \mathbb{S}^{n-1} – сфера в \mathbb{R}^n радиуса 1, G – фигура постоянной ширины, следующим образом. Для $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ положим

$$\varsigma(\theta) = x, \quad \text{где } x, y \in \partial G, |x - y| = \text{diam}G \text{ и } x - y = \theta \text{diam}G, \quad (1)$$

т.е. x, y – диаметральные точки G в направлении θ .

Главным результатом данной работы является

Теорема 2.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины, $EP = \{x | x \in \partial G : \chi(x) = \infty\}$, L – множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. Пусть также выполняются следующие условия:*

(i) для любого $U \in L$

$$\sup_{\alpha, \beta \in U} |\alpha - \beta| < \sqrt{2} - \sigma$$

при некотором $\sigma > 0$, не зависящем от U ;

(ii) если $U, V \in L$ и $U \setminus \tilde{V} \neq \emptyset$, и $\tilde{V} \setminus U \neq \emptyset$, где $\tilde{V} = \{-\beta | \beta \in V\}$, то $\text{int}(\tilde{V}) \cap U = \emptyset$.

Тогда существуют $Y_0, Y_1, \dots, Y_n \subset G$ такие, что $\text{diam} Y_i < \text{diam} G, i = \overline{0, n}$ и $\cup_{i=0}^n Y_i = G$.

Заметим, что несмотря на поставленное в условии теоремы 2.1, на первый взгляд, сильное ограничение класса исходных множеств классом фигур постоянной ширины, фактически это ограничение несущественно. Этот факт отражен в следствии 2.1.

Следствие 2.1. Пусть $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество. Тогда, если фигура постоянной ширины G удовлетворяет условиям теорем 1.2 и 2.1, то \tilde{G} можно покрыть $n + 1$ фигурой с диаметрами строго меньшими $\text{diam} \tilde{G}$.

Тем не менее данное условие значительно усложняет применение теоремы 2.1 на практике, так как требует построения мажорирующей фигуры постоянной ширины для каждого множества из \mathbb{R}^n . Однако из теоремы Г. Хадвигера 1946г. [6] видно, что в смысле проблемы Борсука особое значение имеют точки нерегулярности на границе исходного множества G , т.е. в терминах теоремы 2.1 множество EP . Таким образом, разбить G на $n + 1$ часть меньшего диаметра означает покрыть EP $n + 1$ множеством с диаметрами меньшими $\text{diam} G$. Эти соображения позволяют очевидным образом обобщить теорему 2.1 на класс произвольных (вообще говоря, необязательно даже выпуклых) множеств из \mathbb{R}^n .

Следствие 2.2. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины, $EP = \{x | x \in \partial G : \chi(x) = \infty\}$. Тогда если всякая точка из EP является изолированной, то существуют $Y_0, Y_1, \dots, Y_n \subset G$ такие, что $\text{diam} Y_i < \text{diam} G, i = \overline{0, n}$ и $\cup_{i=0}^n Y_i = G$.

3. Вспомогательные утверждения. Прежде всего введем используемые далее обозначения. Для $a, b \in \mathbb{R}^n$ символ (a, b) обозначает скалярное произведение векторов a и b . Пусть F – множество из \mathbb{R}^n , тогда его замыкание, множество его внутренних точек и его границу будем обозначать $cl(F)$, $\text{int}(F)$ и ∂F , соответственно. Отметим, что для любого ограниченного множества $F \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{diam} F = \text{diam} cl(F) = \max_{x, y \in \partial F} |x - y|,$$

таким образом, в дальнейшем будем работать с классом замкнутых множеств.

Далее в этом разделе мы рассмотрим некоторые вспомогательные результаты.

Для последующего использования нам понадобится следующее утверждение [3, гл. 5, § 23].

Лемма 3.1. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины, тогда для всех $x \in \partial F$ существует $y \in \partial F$ такой, что $|x - y| = \text{diam} F$.

Следующая теорема доказана К. Борсуком в 1932г. [9]

Теорема 3.1. Пусть $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ – шар радиуса 1, тогда существуют X_0, X_1, \dots, X_n – замкнутые множества, такие, что $\bigcup_{i=0}^n X_i \supseteq B_1$ и $\text{diam} X_i < 2, i = \overline{0, n}$.

Пусть F – фигура постоянной ширины 1. Рассмотрим основные свойства функции $\varsigma(\theta) : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial F$, введенной в (1).

Свойство 1. Для любого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ существует единственное $x \in \partial F$ такое, что $\varsigma(\theta) = x$.

Доказательство. Из определения фигур постоянной ширины следует, что для любого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ существуют $x, y \in \partial F$ такие, что $|x - y| = 1$ и $x - y = \theta$.

Допустим, что $\exists x_1 \in \partial F : \varsigma(\theta) = x_1 \neq x$. Тогда из (2.1) следует, что $\exists y_1 \in \partial F : x_1 - y_1 = \theta$, откуда получаем $y_1 \neq y$. Так как $x_1 \neq x$, то $|x - x_1| = \delta > 0$, значит $|y - y_1| = \delta$. Тогда, учитывая равенства $|x - y| = 1$ и $|x_1 - y_1| = 1$, из неравенства треугольника имеем $|x - y_1| > |x - y| = 1$. Получили противоречие, поскольку $\text{diam} F = 1$. \square

Свойство 2. Для любого $x \in \partial F$ существует $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\varsigma(\theta) = x$.

Доказательство. По Лемме 3.1 $\forall x \in \partial F \exists y \in \partial F : |x - y| = 1$, тогда $(x - y) \in \mathbb{S}^{n-1}$ и из (2.1) находим $\varsigma(x - y) = x$. Теперь достаточно положить $\theta = x - y$. \square

Свойство 3. ς – непрерывна на \mathbb{S}^{n-1} .

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из непрерывности изменения диаметральных точек при выборе опорных плоскостей в фигурах постоянной ширины [3, гл. 5, § 23].

Свойство 4. Пусть M – компакт из \mathbb{S}^{n-1} , тогда $\varsigma(M)$ – компакт из ∂F .

Это утверждение является очевидным следствием непрерывности отображения ς .

Введем также функцию $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ такую, что

$$\chi^*(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\varsigma(\theta)), \quad (2)$$

где функция $\chi : F \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ введена в пункте 2.

Лемма 3.2. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, тогда для всех $x \in F$ выполняется неравенство $\chi(x) \geq 1$.

Доказательство. Введем опорную функцию [10, гл. 3, § 13] $\delta^* : F \rightarrow \mathbb{R}^1$ такую, что $\delta^*(x) = \sup_{y \in F} |x - y|$. Тогда для любого $x \in F$ существует $\mu \leq 1$ такое, что $\delta^*(x) = \mu$.

Таким образом, существует $z \in \partial F$, для которого выполняется равенство $|z - x| = \mu$.

Рассмотрим n -мерный шар $B_\mu(x) = \{y \mid |y - x| \leq \mu\}$. Так как $\delta^*(x) = \mu$, то $F \subseteq B_\mu(x)$. Проведем касательную $(n - 1)$ -мерную гиперплоскость X к $B_\mu(x)$ через точку z , тогда $(z - x)$ является нормальным вектором к X .

Так как $X \cap F = z$, то X – опорная гиперплоскость к множеству F [3, гл. 5, § 23]. Значит, $\exists w \in F : |z - w| = 1$ и $(z - w)$ – нормальный вектор к X , тогда точка x принадлежит прямой, проходящей через точки z, w . Лемма доказана. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$, будем называть дугой $\theta_1 \overset{\vee}{\theta}_2$ – криволинейный отрезок наименьшей длины, соединяющий точки θ_1, θ_2 по \mathbb{S}^{n-1} .

Лемма 3.3. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такие, что $\varsigma(\theta_1) = \varsigma(\theta_2)$, тогда для любого $\theta \in \theta_1\theta_2$ выполняется $\varsigma(\theta) = \varsigma(\theta_1)$.

Доказательство леммы следует из непрерывности функции ς .

Следствие 3.1. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, тогда для любого $x \in \partial F$, либо $\chi(x) = 1$, либо $\chi(x) = \infty$. Доказательство непосредственно следует из Лемм 3.2, 3.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, а $\chi : F \rightarrow \mathbb{Z}_+$ – функция, заданная в пункте 2. Будем называть множество $EP \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \partial F : \chi(x) = \infty\}$ множеством особых точек фигуры F

Лемма 3.4. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, EP – множество особых точек F , L – множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. Тогда для любых $\theta_1 \in U, \theta_2 \in V$, где $U, V \in L (U \neq V)$, существует $\theta \in \theta_1\theta_2$ такое, что $\chi^*(\theta) = 1$.

Доказательство. Допустим, существуют такие $\theta_1 \in U, \theta_2 \in V$, где $U, V \in L (U \neq V)$, что для всех $\theta \in \theta_1\theta_2$ имеет место $\chi^*(\theta) \neq 1$, тогда из следствия 3.1 получаем $\chi^*(\theta) = \infty$. Из определения множеств U, V получаем $\theta_1\theta_2 \subset U$ и $\theta_1\theta_2 \subset V$. Получили противоречие с тем, что $U \neq V$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.5. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – фигура постоянной ширины 1, $\varsigma : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial F$ и $\chi^* : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ – функции, заданные в (1) и (2). Пусть также $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ – компактное множество, такое, что $\text{diam} X < 2$ и для любого $\alpha \in \partial X$ выполняется $\chi^*(\alpha) = 1$. Тогда $\text{diam} \varsigma(X) < 1$, где $\varsigma(X) = \{x | x = \varsigma(\alpha), \alpha \in X\}$.

Доказательство. Предположим, что $\text{diam} \varsigma(X) = 1$, тогда существуют $x, y \in \varsigma(X) : |x - y| = 1$. Из определения множества $\varsigma(X)$ получаем, что $\exists \theta, \beta \in X : \varsigma(\theta) = x$ и $\varsigma(\beta) = y$.

Если $\chi^*(\theta) = \chi^*(\beta) = 1$, то из (1) следует, что $x - y = \theta$ и $y - x = \beta$. Значит, $\theta = -\beta$, тогда $|\theta - \beta| = |\theta - (-\theta)| = 2$. Это противоречит условию $\text{diam} X < 2$.

Если $\chi^*(\theta) = \infty, \chi^*(\beta) = 1$, положим $M = \{\alpha | \varsigma(\alpha) = x\}$. Из леммы 3.3 заключаем, что M – связное, а так как X – замкнутое выпуклое и для любого $\alpha \in \partial X$ выполняется $\chi^*(\alpha) = 1$, то $M \subset X$. Так как $y - x = \beta \Leftrightarrow x - y = (-\beta)$, то из (1) $(-\beta) \in M \Rightarrow (-\beta) \in X \Rightarrow |\beta - (-\beta)| = 2$, получили противоречие с $\text{diam} X < 2$.

Аналогично в случае $\chi^*(\theta) = \chi^*(\beta) = \infty$.

Лемма доказана. \square

4. Дополнительные построения. В этом разделе мы построим систему подмножеств $(n - 1)$ -мерной сферы, образы которых при действии функции ς имеют диаметры, строго меньшие диаметра исходного множества.

Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ – множество, удовлетворяющее условиям теоремы 2.1, EP – множество особых точек F , L – множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP\}$. Обозначим $\sigma = \sqrt{2} - \sup_{U \in L} \sup_{\alpha, \beta \in U} |\alpha - \beta|$, тогда из условий теоремы

2.1 $\sigma > 0$. Пусть также для любого множества $V : \tilde{V} = \{-\beta | \beta \in V\}$.

Введем дополнительное множество L' такое, что $U \in L'$ тогда и только тогда, когда $U \in L$ и для всех $V \in L$ выполняется $\tilde{U} \not\subset V$. Таким образом, учитывая

условия теоремы 2.1, для всех $U, V \in L'$ верно равенство $U \cap \text{int}(\tilde{V}) = \emptyset$.

Построим вспомогательные множества $K(U) = \bigcup_{\alpha \in \text{cl}(U)} (B_\nu(\alpha)) \cap \mathbb{S}^{n-1}$, где $B_\nu(x) = \{y \mid |y - x| \leq \nu\}$, а $\nu = \inf_{\alpha \in U} \left\{ \frac{\sigma}{4}, \frac{1}{2} \inf_{\beta \in V: V \neq U} |\alpha - \beta| \right\}$, тогда $\Theta \subseteq \bigcup_{U \in L \setminus L'} K(U) \bigcup_{U \in L'} U$ и для

всех $U \in L \setminus L'$ верно неравенство $\text{diam}K(U) \leq \sqrt{2} - \frac{\sigma}{2}$, так как $\text{diam}U \leq \sqrt{2} - \sigma$.

Построение множеств $X(\theta, F), X(\theta, F, \varepsilon)$. Пусть $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Построим множество $X(\theta, F) \subset \mathbb{S}^{n-1}$.

Проведем $(n-1)$ мерную гиперплоскость X такую, что θ – нормаль к X и $0 \in X$ (где точка 0 – центр \mathbb{S}^{n-1}). Пусть $M = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{S}^{n-1} \cap X, \chi^*(\alpha) = \infty\}$, $M^* = \{U \in L' \mid \text{существует } \alpha \in M \cap U\}$.

Рассмотрим семейства множеств $\{U'\}_{U \in M^*}$ и $\{U^*\}_{U \in M^*}$, где $U' = \bigcup_{V \in L: V \subset \tilde{U}} K(\tilde{V}) \cup U$, а $U^* = \bigcup_{V \in L: V \subset \tilde{U}} K(V) \cup \tilde{U}$. По лемме 3.4 $\inf_{\alpha \in U', \beta \in V'} |\alpha - \beta| > 0$ (где $U' \neq V'$), а из следствия 3.1 для всякого $\alpha \in \text{int}\left[\bigcup_{\beta \in \partial U^*} B_{\nu/2}(\beta) \cap U^*\right]$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.

Пусть $X^*(\theta, F) = [\mathbb{S}^{n-1} \cap \{\alpha \mid (\alpha, \theta) \geq 0\}] \bigcup_{U \in M^*} U^* \setminus \left[\bigcup_{U \in M^*} U'\right]$. Положим теперь $X(\theta, F) = \text{cl}(X^*(\theta, F))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из построения видно, что если $\alpha \in \partial X(\theta, F)$, то $(-\alpha) \in \partial X(\theta, F)$.

Далее пусть

$$\varepsilon = \inf_{\alpha \in \partial X(\theta, F)} \left\{ \frac{1}{n+1}, \frac{\sigma}{8}, \frac{1}{4} \inf_{\beta \in \text{int}X(\theta, F): \chi^*(\beta) = \infty} |\alpha - \beta| \right\}.$$

Так как F удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то из леммы 3.4 и построения семейства $\{U'\}_{U \in M^*}$ следует, что $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь

$$X(\theta, F, \varepsilon) = \text{cl}(\mathbb{S}^{n-1} \setminus X^*(\theta, F, \varepsilon)),$$

где $X^*(\theta, F, \varepsilon) = \bigcup_{x \in \text{cl}(\mathbb{S}^{n-1} \setminus X(\theta, F))} B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{S}^{n-1}$, а $B_\varepsilon(x) = \{y \mid |y - x| \leq \varepsilon\}$.

Лемма 4.1. Пусть $X(\theta, F, \varepsilon)$ – множество, построенное выше, тогда $\text{diam}X(\theta, F, \varepsilon) < 2 = \text{diam}\mathbb{S}^{n-1}$ и для всякого $\alpha \in \partial X(\theta, F, \varepsilon)$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.

Доказательство. Из построения множества $X(\theta, F)$ видно, что все диаметральные точки множества $X(\theta, F) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ принадлежат $\partial X(\theta, F)$, где $\text{diam}X(\theta, F) \leq \text{diam}\mathbb{S}^{n-1} = 2$. Однако $\partial X(\theta, F) \cap X(\theta, F, \frac{1}{2}\varepsilon) = \emptyset$, значит $\text{diam}X(\theta, F, \varepsilon) < \text{diam}X(\theta, F)$.

Из построения множества $X(\theta, F, \varepsilon)$ видно, что число ε выбирается так, что если $\alpha \in \text{int}(X(\theta, F, 2\varepsilon) \setminus X(\theta, F, \varepsilon))$, то $\zeta(\alpha) \notin EP$ фигуры F . Таким образом, $\chi(\alpha) \neq \infty$ для всех $\alpha \in \partial X(\theta, F, \varepsilon)$. Тогда из следствия 3.1 непосредственно получаем требуемое утверждение. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В подпункте 4.1 построено множество $X(\theta, F, \varepsilon)$, следующим образом. Из границы полусферы исключены компоненты связности, являющиеся эле-

ментами множества L , взамен добавлены их антиподальные точки. Затем произведен такой отступ от границы полученного множества, что на границе нового множества нет элементов множества Θ . Кроме того, $\text{diam}X(\theta, F, \varepsilon) < 2 = \text{diam}\mathbb{S}^{n-1}$.

Построение системы векторов $\{\theta_i\}_{i=1}^n$. Пусть $\theta_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$, тогда $X(\theta_1, F), X(\theta_1, F, \varepsilon_1)$ – множества из пункта 4.1.

Находим $\theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\theta_2 \in \partial X(\theta_1, F)$ и $(\theta_1, \theta_2) = \max_{\alpha \in \partial X(\theta_1, F)} (\alpha, \theta_1)$. Из условий на EP фигуры F , леммы 3.3, и условия (i) из теоремы 2.1, следует, что $(\theta_1, \theta_2) \leq 1 - A(\sigma)$, (где $A(\sigma) > 0$) а из условий выбора θ_2 получаем $(\theta_1, \theta_2) \geq 0$. Снова производим операцию построения множеств $X(\theta_2, F), X(\theta_2, F, \varepsilon_2)$ согласно пункту 4.1.

Затем производим эту операцию до момента нахождения θ_{n-1} .

Выпишем i -ую операцию.

Находим $\theta_i \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\theta_i \in \partial X(\theta_{i-1}, F) \cap (\bigcap_{j=1}^{i-2} (X(\theta_j, F, \varepsilon_j) \setminus X(\theta_j, F, \frac{1}{2}\varepsilon_j))) = T_{i-1}$ и $(\theta_i, \theta_{i-1}) = \max_{\alpha \in T_{i-1}} (\alpha, \theta_{i-1})$. Строим множества $X(\theta_i, F), X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$ согласно пункту 4.1.

Построим множества $X(\theta_n, F), X(\theta_n, F, \varepsilon_n)$. Пусть $\varpi \in \mathbb{S}^{n-1}$ такое, что $\varpi \in \partial X(\theta_{n-1}, F) \cap (\bigcap_{j=1}^{n-2} (X(\theta_j, F, \varepsilon_j) \setminus X(\theta_j, F, \frac{1}{2}\varepsilon_j))) = T_{n-1}$ и $(\varpi, \theta_{n-1}) = \max_{\alpha \in T_{n-1}} (\alpha, \theta_{n-1})$. Строим множества $X(\varpi, F), X(\varpi, F, \varepsilon_\varpi)$ согласно пункту 4.1. Тогда, если для всех $U \in L$ верно равенство $\bigcap_{i=1}^{n-1} X(\theta_i, F) \cap X(\varpi, F) \cap U = \emptyset$, то $\theta_n = \varpi$, а $X(\theta_n, F) = X(\varpi, F), X(\theta_n, F, \varepsilon_n) = X(\varpi, F, \varepsilon_\varpi)$. Если же существует $U \in L$ (очевидно единственное) такое, что $\bigcap_{i=1}^{n-1} X(\theta_i, F) \cap X(\varpi, F) \cap U \neq \emptyset$, то $\theta_n \in \mathbb{S}^{n-1}$ выбираем так, что $(\theta_n, \theta_{n-1}) = \min_{\alpha \in V: V \in L, \varpi \in V} (\alpha, \theta_{n-1})$, множества $X(\theta_n, F), X(\theta_n, F, \varepsilon_n)$ также строятся согласно пункту 4.1.

Таким образом, для всех $U \in L$ выполняется равенство $\bigcap_{i=1}^n X(\theta_i, F) \cap U = \emptyset$.

Лемма 4.2. Пусть $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ – система векторов, построенная выше, тогда $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ – линейно независимые векторы.

Доказательство данного утверждения очевидным образом следует из построения системы векторов $\{\theta_i\}_{i=1}^n$.

Лемма 4.3. Пусть $X_0 = \text{cl}(\mathbb{S}^{n-1} \setminus [\bigcup_{i=1}^n X(\theta_i, F, \varepsilon_i)])$, тогда $\text{diam}X_0 < 2$ и для любого $\alpha \in \partial X_0$ выполняется равенство $\chi^*(\alpha) = 1$.

Доказательство. Предположим, что существует $\alpha \in \partial X_0$ такое, что $\chi^*(\alpha) = \infty$. Тогда, так как $X_0, X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$ – замкнутые множества, то из определения X_0 получаем, что существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\alpha \in \partial X(\theta_i, F, \varepsilon_i)$. Из леммы 4.1 получили противоречие.

Допустим, что $\text{diam}X_0 = 2$, тогда так как X_0 – замкнутое множество, то существ-

вуют $\alpha, (-\alpha) \in X_0$. Значит $\alpha, (-\alpha) \notin \text{int}(X(\theta_i, F, \varepsilon_i))$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Из леммы 4.2 $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ – линейно независимые векторы. Тогда существуют $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ такие, что $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i$. Так как $\alpha, (-\alpha) \notin \text{int}(X(\theta_i, F, \varepsilon_i))$ для всякого $i \in \{1, \dots, n\}$ и учитывая, что $\bigcap_{i=1}^n X(\theta_i, F) \cap U = \emptyset$ для всех $U \in L$, то $\lambda_i \leq \varepsilon_i$. Далее имеем $(-\alpha) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \theta_i$, где $\lambda_i^* = -\lambda_i$, тогда $\lambda_i^* \geq -\varepsilon_i$. Таким образом, $-\varepsilon_i \leq \lambda_i^* \leq \varepsilon_i$. Так как $(-\alpha) \in \mathbb{S}^{n-1}$, то

$$|-\alpha|^2 = 1 = (-\alpha, -\alpha) \leq n^2 (\max_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i)^2 \leq \{\text{из условий выбора } \varepsilon_i\} \leq \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1.$$

Получили противоречие – и лемма доказана. \square

5. Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 2.1. Не теряя общности, будем считать, что диаметр рассматриваемого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ равен единице.

Так как фигура G удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то можно построить множества $X_0, X(\theta_i, G, \varepsilon_i), i = \overline{1, n}$ аналогично пункту 4.2. Тогда из леммы 4.1 имеем $\text{diam} X(\theta_i, G, \varepsilon_i) < 2, i = \overline{1, n}$, а из леммы 4.3 $\text{diam} X_0 < 2$.

Пусть $K_0 = \{x | x = \varsigma(\alpha), \text{ где } \alpha \in X_0\}$, $K_i = \{x | x = \varsigma(\alpha), \text{ где } \alpha \in X(\theta_i, G, \varepsilon_i)\}, i = \overline{1, n}$, где ς функция, заданная в (1). По лемме 3.5 $\text{diam} K_i < 1, i = \overline{0, n}$.

Покажем, что $\bigcup_{i=0}^n K_i \supseteq \partial G$. Допустим, это не так, тогда существует $x \in \partial G$ такое, что для всякого $i = \overline{0, n}$ выполняется $x \notin K_i$. Из свойства 2 функции ς имеем $\varsigma(\theta) = x$ для каждого $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Так как $\bigcup_{i=1}^n X(\theta_i, G, \varepsilon_i) \cup X_0 = \mathbb{S}^{n-1}$, то θ принадлежит одному из множеств $X_0, X(\theta_i, G, \varepsilon_i), i = \overline{1, n}$. Значит существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\theta \in K_i$. Получили противоречие.

Введем опорную функцию [10, гл. 3, § 13] $\delta^* : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ такую, что $\delta^*(x) = \sup_{y \in G} |x - y|$.

Пусть $x_0 \in G : \delta^*(x_0) = \inf_{x \in G} \delta^*(x)$.

Построим множества Y_i следующим образом. Для всякого $x \in Y_i$ существует $z \in K_i$, которому соответствует $0 < \lambda < 1$ такое, что $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)z, i = \overline{0, n}$. Так как G – выпуклое множество, то Y_i – замкнутое множество и $\bigcup_{i=0}^n Y_i \supseteq G$.

Для любого $x \in Y_i \setminus K_i$ и всякого $y \in Y_i$ выполняется неравенство $|x - y| < 1$, так как из $x \in G \setminus \partial G, y \in G$ следует, что $|x - y| < \text{diam} G = 1$, а $Y_i \setminus K_i \subseteq G \setminus \partial G$ и $Y_i \subset G$ для $i = \overline{0, n}$.

Для любого $x \in K_i$ и всякого $y \in Y_i \setminus K_i$, согласно предыдущему утверждению, выполняется неравенство $|x - y| < 1$. Тогда, учитывая, что $\text{diam} K_i < 1$, имеем $\text{diam} Y_i < 1, i = \overline{0, n}$.

Таким образом, $G \subseteq \bigcup_{i=0}^n Y_i$, где $\text{diam} Y_i < 1$ для $i = \overline{0, n}$, что и требовалось. \square

Доказательство следствия 2.1. Так как $\tilde{G} \subseteq G$, а из теоремы 2.1 $\cup_{i=0}^n Y_i \supseteq G$, где $\text{diam} Y_i < \text{diam} G = \text{diam} \tilde{G}$, $i = \overline{0, n}$, то получаем искомый результат. \square

Доказательство следствия 2.2. Если G – фигура постоянной ширины такая, что множество особых точек EP состоит из изолированных точек. Пусть $\Theta = \{\theta | \zeta(\theta) \in EP\}$, тогда для всякой компоненты связности U множества Θ существует единственный элемент $x \in EP$ такой, что для всякого $\alpha \in U$ выполняется равенство $\zeta(\alpha) = x$.

Предположим, что существуют $\alpha, \beta \in U$ такие, что $|\alpha - \beta| > 1$, тогда из (1) $x - y_1 = \alpha$, $x - y_2 = \beta$, значит $y_1 = x - \alpha$, $y_2 = x - \beta$, тогда $y_1 - y_2 = \beta - \alpha$, следовательно $|y_1 - y_2| = |\alpha - \beta| > 1 = \text{diam} G$, но $y_1, y_2 \in G$, получили противоречие. Таким образом, для всякой компоненты связности U множества Θ выполняется неравенство $\sup_{\alpha, \beta \in U} |\alpha - \beta| \leq 1 < \sqrt{2}$, значит множество G удовлетворяет условию (i) теоремы 2.1.

Покажем, что если $U \in L$, то для любого $\alpha \in \text{int}(U)$ выполняется равенство $\chi^*(-\alpha) = 1$.

Пусть существует $\alpha \in \text{int}(U)$ такое, что $\chi^*(-\alpha) \neq 1$. Тогда из следствия 3.1 получаем $\chi^*(-\alpha) = \infty$. Пусть $\min_{\eta \in \partial U} |\alpha - \eta| = \delta$. По лемме 3.3 существует $\beta \neq -\alpha \in \mathbb{S}^{n-1} \cap B_{\delta/2}(-\alpha)$ такое, что $\zeta(\beta) = \zeta(-\alpha) = y$, значит $(-\beta) \in U$. Из определения функции ζ получаем $y - x = \beta$, $y - x = -\alpha \Rightarrow \beta = -\alpha$. Таким образом, получили противоречие.

Но это и означает, что для всех $U, V \in L$ имеет место равенство $\text{int}(\tilde{V}) \cap U = \emptyset$. Таким образом, G удовлетворяет условию (ii) теоремы 2.1. Утверждение доказано. \square

1. Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел // Москва: Наука, 1971. – С. 96.
2. Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц. Разбиение фигур на меньшие части // Москва: Наука, 1971. – С. 88.
3. Болтянский В.Г., Солтан П.С. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств // Кишинев: Штиинца, 1978. – С. 280.
4. Kahn J., Kalai G. A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc.(New Ser.) – 1993 – **29**, № 1. – С. 60-62.
5. Райгородский А.М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике // Москва: МЦМНО, 2007. – С. 136.
6. Hadwiger H. Uberdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comm. Math. Helv. – 1945/46. – **18**. – С. 73-75.
7. Anderson R.D., Klee V.L. Convex functions and upper semi-continuous collections // Duke Math.J. – 1952. – **190**, № 2 – С. 349-357
8. Болтянский В.Г. Задача об освещении границы выпуклого тела // Изв. МФАН СССР. – 1960. – **10** (76).
9. Borsuk K. Satze uber die n-dimensionale Sphere // Fund. Math. – 1933. – **20**. – С. 177-190.
10. Рокаффеллер Р.Т. Выпуклый анализ // Москва: Мир, 1973.

A. Yu. Ivanov

Solution of the Borsuk's conjecture for some sets with irregular boundary.

Considers the problem of decomposition of shapes into parts of smaller diameter in multidimensional spaces. Essentially extended the class of sets for which there is a conjecture of Borsuk

Keywords: *convex set, a constant width's figure, the support function, splitting sets into parts of smaller diameter.*

О. Ю. Иванов

Розв'язок проблеми Борсука для деяких множин з нерегулярною межею.

Розглядається задача про розбиття фігур на частини меншого діаметра в багатовимірних просторах. Суттєво розширено клас множин, для яких має місце гіпотеза К. Борсука

Ключові слова: *опукла множина, фігура постійної ширини, опорна функція, діаметр розбиття множин на частини меншого діаметра.*

Донецкий национальный ун-т
sejang@ua.fm

Получено 01.11.11

УДК 517.5

©2011. Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

В работе установлен ряд критериев существования регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в произвольных жордановых областях. Соответствующие критерии существования псевдoreгулярных и многозначных решений задачи Дирихле сформулированы также для случая конечносвязных областей.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, задача Дирихле, регулярные решения, псевдoreгулярные решения, многозначные решения, теоремы существования.

1. Введение. Пусть D – область в комплексной плоскости \mathbb{C} , $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. Уравнением Бельтрами называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \quad (1)$$

где $f_{\bar{z}} = \bar{\partial}f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y , соответственно. Функция μ называется комплексным коэффициентом, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \quad (2)$$

– дилатацией уравнения (1). Уравнение (1) называется вырожденным, если дилатация K_μ является существенно неограниченной, т.е. $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Краевые задачи для уравнений Бельтрами впервые изучались в известной диссертации Римана, который рассматривал частный случай аналитических функций, когда $\mu(z) \equiv 0$, и работах Гильберта (1904, 1924), который исследовал соответствующую систему Коши–Римана для действительной и мнимой части аналитических функций $f = u + iv$, а также работе Пуанкаре (1910) по приливам. Задача Дирихле хорошо изучена для равномерно эллиптических систем уравнений, см., например, [1] и [2].

Задача Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в единичном круге изучалась в работе [3]. Заметим, что критерии существования решений задачи Дирихле, сформулированные в последней работе, не инвариантны относительно конформных отображений Римана. Недавние результаты о существовании сильных кольцевых решений для вырожденных уравнений Бельтрами в [4] и [5], а также развитие теории граничного поведения кольцевых гомеоморфизмов, см., например, [6], позволяют получить дальнейшие продвижения в области существования регулярных решений задачи Дирихле в более общих областях.

2. Определения и предварительные замечания. Пусть задано семейство Γ кривых γ в комплексной плоскости \mathbb{C} . Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$

называют *допустимой* для Γ , пишут $\varrho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \varrho(z) |dz| \geq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (3)$$

Конформным модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \varrho^2(z) dx dy. \quad (4)$$

Пусть D – область в \mathbb{C} , $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, и пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Далее, как обычно, $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{D}$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [7], и тесно связано с решением вырожденных уравнений типа Бельтрами на плоскости. Следуя работе [8], см. также [9], говорим, что гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q -гомеоморфизмом в точке $z_0 \in D$* , если соотношение

$$M(\Delta(fS_1, fS_2; fD)) \leq \int_A Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|) dx dy \quad (5)$$

выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$ и для любой измеримой (по Лебегу) функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (6)$$

Говорят, что гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q -гомеоморфизмом в D* , если условие (5) выполнено для всех точек $z_0 \in D$.

В работах [4] и [5] впервые рассматривались кольцевые Q -гомеоморфизмы в граничных точках области D . Гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *кольцевым Q -гомеоморфизмом в граничной точке z_0 области D* , если

$$M(\Delta(fC_1, fC_2; fD)) \leq \int_{A \cap D} Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|) dx dy \quad (7)$$

для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$ и произвольных континуумов C_1 и C_2 в D , которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца A в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащим

z_0 и ∞ , соответственно, и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (6). Говорим, что гомеоморфизм f из D в $\bar{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q -гомеоморфизмом* в \bar{D} , если условие (7) выполнено для всех точек $z_0 \in \bar{D}$.

Напомним также следующие топологические понятия. Область $D \subset \mathbb{C}$ назовем *локально связной в точке $z_0 \in \partial D$* , если для любой окрестности U точки z_0 , существует окрестность $V \subseteq U$ точки z_0 такая, что $V \cap D$ связно. Заметим, что каждая жорданова область D в \mathbb{C} является локально связной в любой точке ∂D , см., например, [10], стр. 66.

Будем говорить, что ∂D *слабо плоская в точке $z_0 \in \partial D$* , если для любой окрестности U точки z_0 и любого числа $P > 0$, существует окрестность $V \subset U$ точки z_0 такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geq P$$

для всех континуумов E и F в D , пересекающих ∂U и ∂V . Назовем границу ∂D *слабо плоской*, если она слабо плоская в каждой точке из ∂D .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что многие регулярные области, такие как: выпуклые, квазивыпуклые, гладкие, липшицевы, равномерные, области квазиэкстремальной длины по Герингу-Мартио – имеют слабо плоские границы, см., например, [11].

Напомним, что функция $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi \in L^1_{\text{loc}}(D)$, называется функцией *ограниченного среднего колебания* по Джону-Ниренбергу, сокр. $\psi \in \text{ВМО}$, если

$$\|\psi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int_B |\psi(z) - \psi_B| dx dy < \infty, \quad (8)$$

где точная верхняя грань берётся по всем кругам $B \subset D$, а ψ_B – среднее значение функции ψ в круге B . Пишем $\psi \in \text{ВМО}(\bar{D})$, если $\psi \in \text{ВМО}(G)$, где G – область в \mathbb{C} , содержащая \bar{D} .

Следуя работе [12], говорим, что функция $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $z_0 \in D$, пишем $\psi \in \text{ФМО}(z_0)$, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(z_0, \varepsilon)} |\psi(z) - \tilde{\psi}_\varepsilon| dx dy < \infty, \quad (9)$$

где $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$, а $\tilde{\psi}_\varepsilon$ – среднее значение ψ в $B(z_0, \varepsilon)$. Пишем $\psi \in \text{ФМО}(D)$, если (9) выполнено для каждой точки $z_0 \in D$. Также пишем $\psi \in \text{ФМО}(\bar{D})$, если ψ задана в некоторой области G в \mathbb{C} , содержащей \bar{D} , и $\psi \in \text{ФМО}(z_0)$ для всех $z_0 \in \bar{D}$.

Как известно, $L^\infty(D) \subset \text{ВМО}(D) \subset L^p_{\text{loc}}(D)$ для всех $p \in [1, \infty)$. Однако, $\text{ФМО}(D)$ не является подклассом $L^p_{\text{loc}}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя, $\text{ФМО}(D) \subset L^1_{\text{loc}}(D)$, см., например, [9], с. 211. Таким образом, ФМО существенно шире ВМО_{loc} .

3. О задаче Дирихле в односвязных областях. *Задача Дирихле* для уравнений Бельтрами (1) в ограниченной области D комплексной плоскости \mathbb{C} состоит в нахождении непрерывной функции $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, имеющей частные производные

первого порядка п.в. и удовлетворяющей уравнению (1) п.в., а также граничному условию

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\zeta) \quad \forall \zeta \in \partial D \quad (10)$$

для предписанной непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. При $\varphi(\zeta) \not\equiv \text{const}$ *регулярное решение* такой задачи есть непрерывное в \mathbb{C} , дискретное и открытое отображение $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$ с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$ п.в., удовлетворяющее условию (10) и п.в. (1). Напомним, что отображение $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в \mathbb{C} . В случае $\varphi(\zeta) \equiv c$, $\zeta \in \partial D$, под *регулярным решением* задачи Дирихле (10) для уравнения Бельтрами (1) будем понимать функцию $f(z) = c + ic'$, $c' \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. Пусть D – жорданова область в \mathbb{C} , $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. и $K_\mu \in L^1(D)$. Предположим, что для каждого $z_0 \in \bar{D}$ существует $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и однопараметрическое семейство измеримых функций $\psi_{z_0, \varepsilon} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, таких, что

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0, \varepsilon}(t) dt < \infty \quad (11)$$

и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0} K_\mu(z) \cdot \psi_{z_0, \varepsilon}^2(|z - z_0|) dx dy = o(I_{z_0}^2(\varepsilon)). \quad (12)$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение f задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$.

В условии (12) мы предполагаем, что K_μ продолжена нулем вне области D .

Доказательство. Пусть F – регулярное гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W_{\text{loc}}^{1,1}$, которое является кольцевым Q -гомеоморфизмом в \bar{D} с $Q = K_\mu$ и которое существует по лемме 4.1 из [4] в силу условия (12). Заметим, что $\bar{\mathbb{C}} \setminus D^*$, где $D^* = F(D)$, не может состоять из единственной точки ∞ , т.к. в противном случае граница D^* являлась бы слабо плоской и по лемме 1 и теореме 3 из работы [6] F должно было иметь гомеоморфное продолжение в \bar{D} , что невозможно, поскольку граница D состоит более чем из одной точки. Кроме того, область D^* односвязна, см., например, лемму 5.3 в [12] или лемму 6.5 в [9]. Таким образом, по теореме Римана, см., например, II.2.1 в [13], D^* можно отобразить на единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ с помощью конформного отображения R . Ввиду инвариантности модуля при конформных отображениях, $g := R \circ F$ вновь является регулярным гомеоморфным решением уравнения Бельтрами (1), которое является кольцевым Q -гомеоморфизмом в \bar{D} с $Q = K_\mu$ и отображает D на \mathbb{D} . Более того, по лемме 1 и теореме 3 в [6], g допускает продолжение до гомеоморфизма $g_* : \bar{D} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$,

поскольку \mathbb{D} имеет слабо плоскую границу, а жорданова область D локально связна на границе.

Будем искать решение исходной задачи Дирихле (10) в виде $f = h \circ g$, где h – аналитическая функция в \mathbb{D} , с граничным условием

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} h(z) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta)) \quad \forall \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Как известно, аналитическая функция h восстанавливается в \mathbb{D} с помощью формулы Шварца, см., например, § 8, Гл. III, часть 3 в [14], по её действительной части на границе с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \varphi \circ g_*^{-1}(\zeta) \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Как легко видеть, функция $f = h \circ g$ дает искомое регулярное решение задачи Дирихле (10) для уравнения Бельтрами (1). \square

По лемме 1 с выбором $\psi_{z_0, \varepsilon}(t) \equiv 1/t \log \frac{1}{t}$, см. следствие 2.3 в [12], получаем:

Теорема 1. Пусть $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области D функция такая, что $|\mu(z)| < 1$ п.в. и

$$K_\mu(z) \leq Q(z) \in \operatorname{FMO}(\overline{D}). \quad (13)$$

Тогда для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (10).

Как и в лемме 1, здесь и далее подразумевается, что K_μ продолжена нулем вне области D .

Следствие 1. В частности, заключение теоремы 1 остается в силе, если $K_\mu(z) \leq Q(z) \in \operatorname{VMO}(\overline{D})$.

По следствию 2.1 в [12] из теоремы 1 также имеем:

Следствие 2. Заключение теоремы 1 также имеет место, если

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(z_0, \varepsilon)} K_\mu(z) \, dx dy < \infty \quad \forall z_0 \in \overline{D}.$$

Теорема 2. Пусть $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области D функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что $K_\mu \in L^1(D)$ и

$$\int_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu\|_1(z_0, r)} = \infty \quad \forall z_0 \in \overline{D}, \quad (14)$$

где $\|K_\mu\|_1(z_0, r) = \int_{\gamma_r} K_\mu(z) |dz|$ – нормы в L^1 функции K_μ на окружностях $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup_{z \in D} |z - z_0|$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$.

Доказательство. Теорема 2 следует из леммы 1 при специальном выборе

$$\psi_{z_0, \varepsilon}(t) \equiv \psi_{z_0}(t) = \begin{cases} 1/[tk_{z_0}(t)], & t \in (0, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in [\varepsilon_0, \infty), \end{cases}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(z_0)$ и $k_{z_0}(t)$ – среднее значение $K_\mu(z)$ на окружности $S(z_0, t)$. \square

Следствие 3. В частности, заключение теоремы 2 имеет место, если

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \forall z_0 \in \bar{D}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $k_{z_0}(\varepsilon)$ – среднее значение функции K_μ на окружности $S(z_0, \varepsilon)$.

Из теоремы 2, привлекая также теорему 3.1 из работы [15], имеем следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая в жордановой области D функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что

$$\int_D \Phi(K_\mu(z)) \, dx dy < \infty, \quad (15)$$

где $\Phi : \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ – неубывающая выпуклая функция, с условием

$$\int_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \quad (16)$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$.

Замечание 2. По теореме Стоилова о факторизации, см., например, [16], любое регулярное решение f задачи Дирихле для уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\text{loc}}(D)$ может быть представлено в виде композиции $f = h \circ F$, где h – аналитическая функция, а F – гомеоморфное регулярное решение класса $W^{1,1}_{\text{loc}}$. Таким образом, по теореме 5.1 из [17], условие (16) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы любое уравнение Бельтрами (1) с интегральными ограничениями на дилатацию вида (15) имело регулярные решения задачи Дирихле (10) для любой непостоянной непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$.

Полагая $H(t) = \log \Phi(t)$, заметим, что по теореме 2.1 в [15] условие (16) эквивалентно любому из следующих условий:

$$\int_\Delta^\infty H'(t) \frac{dt}{t} = \infty, \quad (17)$$

или

$$\int_\Delta^\infty \frac{dH(t)}{t} = \infty, \quad (18)$$

или

$$\int_{\Delta}^{\infty} H(t) \frac{dt}{t^2} = \infty \quad (19)$$

для некоторого $\Delta > 0$, а также каждому из равенств:

$$\int_0^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right) dt = \infty \quad (20)$$

для некоторого $\delta > 0$,

$$\int_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \quad (21)$$

для некоторого $\Delta_* > H(+0)$.

Здесь, интеграл в (18) понимается как интеграл Лебега-Стилтьеса, а интегралы в (17) и (19)-(21) как обычные интегралы Лебега.

4. О псевдорегулярных решениях задачи Дирихле в многосвязных областях. Как впервые заметил Боярский, см., например, § 6 главы 4 в [2], в случае многосвязных областей задача Дирихле для уравнений Бельтрами, вообще говоря, не имеет решений в классе непрерывных (однозначных) в \mathbb{C} функций. Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли в этом случае существование решения задачи Дирихле получить в более широком классе? Оказывается можно, если решение задачи будем искать в классе функций, имеющих некоторое количество заранее фиксированных изолированных полюсов внутри области D . Точнее, при $\varphi(\zeta) \neq \text{const}$, псевдорегулярное решение такой задачи есть непрерывное в $\overline{\mathbb{C}}$, дискретное и открытое отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ класса Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$ вне полюсов с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$ п.в., удовлетворяющее условию (10) и п.в. (1).

Рассуждая аналогично случаю односвязных областей и применяя теорему V.6.2 из [13] об отображениях конечносвязных областей на круговые области, а также теорему 4.14 в [2], получаем следующие результаты.

Теорема 4. Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C} , граница которой состоит из $n \geq 2$ попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что

$$K_{\mu}(z) \leq Q(z) \in \text{FMO}(\overline{D}). \quad (22)$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \neq \text{const}$, с полюсами в n предписанных внутренних точках D .

Следствие 4. В частности, заключение теоремы 4 остается в силе, если $K_{\mu}(z) \leq Q(z) \in \text{ВМО}(\overline{D})$.

Следствие 5. *Заключение теоремы 4 также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(z_0, \varepsilon)} K_\mu(z) dx dy < \infty \quad \forall z_0 \in \bar{D}.$$

Теорема 5. *Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C} , граница которой состоит из $n \geq 2$ попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что $K_\mu \in L^1(D)$ и*

$$\int_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu\|_1(z_0, r)} = \infty \quad \forall z_0 \in \bar{D}, \quad (23)$$

где $\|K_\mu\|_1(z_0, r) = \int_{\gamma_r} K_\mu(z) |dz|$ – нормы в L^1 функции K_μ на окружностях $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup_{z \in D} |z - z_0|$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет псевдрегулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \text{const}$, с полюсами в n предписанных внутренних точках D .

Следствие 6. *В частности, заключения теоремы 5 имеют место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \forall z_0 \in \bar{D}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $k_{z_0}(\varepsilon)$ – среднее значение функции K_μ на окружности $S(z_0, \varepsilon)$.

Теорема 6. *Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C} , граница которой состоит из $n \geq 2$ попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. такая, что*

$$\int_D \Phi(K_\mu(z)) dx dy < \infty, \quad (24)$$

где $\Phi : \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ – неубывающая выпуклая функция с условием

$$\int_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \quad (25)$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет псевдрегулярное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \text{const}$, с полюсами в n предписанных внутренних точках D .

5. О существовании многозначных решений в многосвязных областях.

В многосвязных областях D в \mathbb{C} , помимо псевдрегулярных решений, задача Дирихле (10) для уравнений Бельтрами (1) допускает многозначные решения в духе теории многозначных аналитических функций. Говорим, что непрерывное, дискретное

и открытое отображение $f : B(z_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$, где $B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$, является *локальным регулярным решением* уравнения (1), если $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$, $J_f \neq 0$ и f удовлетворяет (1) п.в. Два локальных регулярных решения $f_0 : B(z_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$ и $f_* : B(z_*, \varepsilon_*) \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (1) будем называть продолжением друг друга, если существует конечная цепь таких решений $f_i : B(z_i, \varepsilon_i) \rightarrow \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, что $f_1 = f_0$, $f_m = f_*$ и $f_i(z) \equiv f_{i+1}(z)$ для $z \in E_i := B(z_i, \varepsilon_i) \cap B(z_{i+1}, \varepsilon_{i+1}) \neq \emptyset$, $i = \overline{1, m-1}$. Совокупность локальных регулярных решений $f_j : B(z_j, \varepsilon_j) \rightarrow \mathbb{C}$, $j \in J$, будем называть *многозначным решением уравнения (1) в D* , если круги $B(z_j, \varepsilon_j)$ накрывают всю область D и f_j попарно являются продолжениями друг друга в этой совокупности. Многозначное решение (1) будем называть *многозначным решением задачи Дирихле (10)*, если $u(z) = \text{Re } f(z) = \text{Re } f_j(z)$, $z \in B(z_j, \varepsilon_j)$, $j \in J$, является однозначной функцией в D , которая удовлетворяет условию (10).

Аналогично предыдущим секциям, доказательство существования многозначных решений задачи Дирихле для уравнений Бельтрами (1) в многосвязных областях редуцируются к задаче Дирихле для гармонических функций в круговых областях, см., например, § 3 главы VI в [13].

Теорема 7. Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C} , граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., удовлетворяющая посылкам теорем 4-6 или следствий 4-6. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет многозначное решение задачи Дирихле (10) для любой непрерывной функции $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$.

Замечание 3. Можно показать, что имеет место аналог известной теоремы о монодромии для аналитических функций, состоящий в том, что любое многозначное решение уравнения Бельтрами (1) в односвязной области D является его регулярным однозначным решением.

1. Боярский Б.В. Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. – 1957. – Т. 43 (85). – С. 451-503.
2. Векун И.Н. Обобщённые аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959.
3. Dybov Yu. On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – V. 55, no. 12. – P. 1099-1116.
4. Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – V. 55, no. 1-3. – P. 219-236.
5. Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. – 2009. – № 1. – P. 127-137.
6. Ломако Т.В. О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 10. – С. 1329–1337.
7. Gehring F.W. Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. – P. 353–393.
8. Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – V. 96. – P. 117-150.
9. Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Monographs in Mathematics, 2009. – 367 p.
10. Wilder R.L. Topology of Manifolds. – AMS, New York, 1949.
11. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И. Регулярные области в теории отображений на римановых многообразиях // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 23-32.

12. *Игнатъев А.А., Рязанов В.И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 395-417.
13. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966.
14. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – Москва: Наука, 1968.
15. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестник. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 524-535.
16. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – Москва: Наука, 1964.
17. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2011. – DOI: 10.1080/17476933.2010.534790.

D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov
The Dirichlet problem for the Beltrami equations.

In this paper it is established a series of criteria for the existence of regular solutions of the Dirichlet problem for degenerate Beltrami equations in arbitrary Jordan domains. It is also formulated the corresponding criteria for existence of pseudoregular and multi-valued solutions of the Dirichlet problem in the case of finitely connected domains.

Keywords: *Beltrami equations, Dirichlet problem, regular solutions, pseudoregular solutions, multi-valued solutions, existence theorems.*

Д. О. Ковтонюк, І. В. Петков, В. І. Рязанов
Задача Діріхле для рівнянь Бельтрамі.

У роботі встановлено ряд критеріїв існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі у довільних жорданових областях. Відповідні критерії існування псевдoreгулярних та багатозначних розв'язків задачі Діріхле сформульовано також для випадку скінченноз'язних областей.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, задача Діріхле, регулярні розв'язки, псевдoreгулярні розв'язки, багатозначні розв'язки, теореми існування.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
denis_kovtonyuk@bk.ru
igorpetkov@i.ua
vlryazanov1@rambler.ru
vl.ryzanov1@gmail.com

Получено 23.11.11

УДК 517.55

©2011. Ю. С. Коломойцев

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

В работе показана точность теоремы, дающей достаточное условие для мультипликаторов степенных рядов в пространствах Харди $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, в терминах совместного убывания функции-мультипликатора и ее производных на бесконечности.

Ключевые слова: мультипликатор, пространства Харди $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, неравенство Бернштейна.

1. Введение. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг. Аналитическая в единичном круге D функция f принадлежит пространству $H_p(D)$, если

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0 < \rho < 1} \left(\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Хорошо известно, что каждая функция $f \in H_p(D)$, $p > 0$, имеет некасательный предел $f(e^{it})$ для почти всех $t \in [0, 2\pi)$, принадлежащий пространству $L_p(0, 2\pi)$, т.е. пространству измеримых, 2π -периодических функций с конечной (квази-)нормой

$$\|f\|_p = \|f(e^{it})\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Имеет место равенство: $\|f\|_{H_p} = \|f\|_p$ (см. [1]).

Любая функция из $H_p(D)$, $p > 0$, раскладывается в круге D в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

где c_k – коэффициенты ряда Тейлора функции f .

Числовая последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется мультипликатором в $H_p(D)$, если для любой функции $f \in H_p(D)$ с коэффициентами Тейлора $\{c_k\}$

$$(\Lambda f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k z^k \in H_p(D)$$

и существует константа γ такая, что для любой функции $f \in H_p(D)$

$$\|\Lambda f\|_{H_p} \leq \gamma \|f\|_{H_p}, \quad \|\{\lambda_k\}\|_{M_p} = \inf \gamma.$$

Если $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, то будем писать $\varphi \in M_p$, если

$$\|\varphi\|_{M_p} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty.$$

Приведем здесь несколько свойств мультипликаторов (см., например, [2], [3, гл. 7]): $M_p \subset M_q$ при $0 < p \leq q \leq 2$; $\|\{\lambda_k \mu_k\}\|_{M_p} \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M_p} \|\{\mu_k\}\|_{M_p}$, $p > 0$; $\|\{\lambda_k + \mu_k\}\|_{M_p}^p \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M_p}^p + \|\{\mu_k\}\|_{M_p}^p$, $p \in (0, 1]$.

В работе [2] Р.М. Тригубом была доказана следующая теорема, дающая достаточное условие для мультипликаторов степенных рядов в пространствах Харди $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, в терминах совместного убывания функции-мультипликатора и ее производных на бесконечности.

Теорема А. Пусть $0 < p \leq 1$, а $\varphi \in C^r[0, \infty)$ при некотором натуральном $r > 1/p - 1/2$. Если

$$|\varphi(x)| \leq \frac{c}{1+x^{\gamma_0}}, \quad \gamma_0 > 0, \quad |\varphi^{(r)}(x)| \leq \frac{c}{1+x^{\gamma_r}}, \quad \gamma_r > 0,$$

где

$$\min(\gamma_r - \gamma_0 - r, 0) + \frac{2\gamma_0 r p}{2-p} > 0, \quad (1)$$

то $\varphi \in M_p$.

Данная теорема имеет применения при доказательстве целого ряда теорем для аналитических функций из пространства Харди (см., например, [3, гл. 7] и [4]).

Вит.В. Волчковым в [5] была показана точность теоремы А для некоторых значений γ_0 и γ_r . В частности, был получен следующий результат:

Теорема В. Для любого $\gamma \in (0, 1/2)$ и $r \in \mathbb{N}$ найдется функция $\varphi \in C^r[0, \infty)$ такая, что $\varphi(x) = O(\frac{1}{x^\gamma})$, $\varphi^{(r)}(x) = O(\frac{1}{x^\gamma})$ при $x \rightarrow +\infty$, но $\varphi \notin M_p$ ни при каком $p \in (0, 1]$.

Наша цель показать точность условия (1) теоремы А при каждом фиксированном $p \in (0, 1]$. Имеет место:

Теорема 1. Пусть $0 < p \leq 1$, натуральное $r > 1/p - 1/2$ и положительные числа γ_0 и γ_r таковы, что

$$\min(\gamma_r - \gamma_0 - r, 0) + \frac{2\gamma_0 r p}{2-p} < 0. \quad (2)$$

Тогда найдется функция $\varphi \in C^r[0, \infty)$ такая, что

$$|\varphi(x)| \leq \frac{c}{1+x^{\gamma_0}}, \quad |\varphi^{(r)}(x)| \leq \frac{c}{1+x^{\gamma_r}},$$

но $\varphi \notin M_p$

Всюду в статье через c и C_j , $j = 1, 2, \dots$, будем обозначать некоторые положительные константы, зависящие от указанных параметров.

2. Вспомогательные утверждения. Прежде чем перейти к формулировке вспомогательных утверждений введем необходимые обозначения.

Преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R})$ обозначим через

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy,$$

через \mathcal{F}^{-1} обозначим обратное преобразование Фурье, т.е. $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x)$.

Контрпример в теореме 1 будем строить с помощью специальной функции-мультипликатора

$$m_{\alpha,\beta}(x) = \psi(x) \frac{e^{i|x|^\alpha}}{|x|^\beta},$$

где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(x) = 0$ при $|x| < 1/2$ и $\psi(x) = 1$ при $|x| \geq 1$. Отметим, что функция $m_{\alpha,\beta}$ была предметом специального изучения в работах [6]-[8] и [9, гл. 4]. Доказательство следующей леммы см. в [7].

Лемма 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ и

$$F_{\alpha,\beta;\varepsilon}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\varepsilon|x|}m_{\alpha,\beta}(x)\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда

1. $F_{\alpha,\beta}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{\alpha,\beta;\varepsilon}(x)$ существует для каждого $x \neq 0$ и $F_{\alpha,\beta} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$;
2. $|F_{\alpha,\beta}(x)| \asymp |x|^{\frac{\beta-1+\frac{\alpha}{2}}{1-\alpha}} + \gamma(x)$ при $|x| \rightarrow 0$, где γ – некоторая непрерывная функция;
3. Для каждого $r \in \mathbb{N}$, $|F_{\alpha,\beta;\varepsilon}(x)| = O(|x|^{-r})$ равномерно по ε при $|x| \rightarrow \infty$;

В частности, $F_{\alpha,\beta} \in L_p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq 1$, если и только если $\alpha(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) < \beta + \frac{1}{p} - 1$.

При доказательстве теоремы 1 мы будем использовать неравенство типа Бернштейна для аналитических полиномов, которое было получено независимо Е.С. Беллинским [10] и Вит.В. Волчковым [11]:

Лемма 2. Пусть $0 < p \leq 1$, $\lambda > 0$ и $N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left\| \sum_{k=0}^N k^\lambda c_k e^{ikt} \right\|_p \leq cN^\lambda \left\| \sum_{k=0}^N c_k e^{ikt} \right\|_p,$$

где c – константа, зависящая только от p .

Заметим, что для полиномов с полным спектром данное неравенство имеет место только при $\lambda \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ (см. [12]).

Доказательство следующей леммы см., например, в [3, гл. 4].

Лемма 3. Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset (-1, 1)$ и $\varphi(0) = 1$. Тогда

$$\left\| \sum_{k=-N}^N \varphi\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt} \right\|_p \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p}-1},$$

где \asymp – двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от N .

Нам также понадобится формула суммирования Пуассона (см., например, [13, гл. 2]).

Лемма 4. Если $f \in L(\mathbb{R})$, то ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k)$ сходится абсолютно п.в. к 2π -периодической локально интегрируемой функции

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}f(k) e^{ikx}.$$

3. Доказательство теоремы 1. Заметим, что если $\gamma_r - \gamma_0 \geq r$, то $\gamma_0 < 0$, а это противоречит условиям теоремы. Поэтому далее полагаем $\gamma_r - \gamma_0 < r$.

Нетрудно видеть, что $|m^{(r)}(x)| \leq c/|x|^{\beta-r(\alpha-1)}$. Таким образом, если положить $\gamma_0 = \beta$, а $\gamma_r = \beta - r(\alpha - 1)$, то условие (2) будет эквивалентно неравенству $\beta < \alpha(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$.

Рассмотрим сначала случай $0 < p < 1$. Предположим, что функция $m \in M_p$ и выберем $\lambda \in (0, \frac{1}{p} - 1)$ так, чтобы $\beta + (\frac{1}{p} - 1) - \lambda < \alpha(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$. Поскольку функция e^{-x} является мультипликатором (см. теорему А), то

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|} \psi(|k|) \frac{e^{i|k|^\alpha}}{|k|^{\beta-\lambda}} e^{ikt} \right\|_p \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda e^{ikt} \right\|_p, \quad (3)$$

где C_1 – некоторая константа, не зависящая от ε .

Покажем, что в правой части неравенства (3), действительно, стоит конечная величина. Для этого нам понадобится следующее разбиение единицы. Пусть $h_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $h_0(x) = 0$ при $x \leq -\frac{1}{2}$, $h_0(x) + h_0(-x) \equiv 1$, а $h_0(x) - \frac{1}{2}$ – нечетная функция. Положим

$$h_\nu(x) = h_0\left(\frac{x+1}{2^{\nu-1}} - \frac{3}{2}\right) h_0\left(\frac{3}{2} - \frac{x+1}{2^\nu}\right).$$

Очевидно, что при $\nu \in \mathbb{N}$ $\text{supp } h_\nu \subset [2^{\nu-1} - 1, 2^{\nu+1} - 1]$ и

$$h_0\left(\frac{1}{2} - x\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(x) = 1 \quad \text{для всех } x \geq 0.$$

Используя леммы 2 и 3, находим:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda e^{ikt} \right\|_p^p &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(k) \right) e^{ikt} \right\|_p^p \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda h_\nu(k) e^{ikt} \right\|_p^p \leq C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\lambda p} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} h_\nu(k) e^{ikt} \right\|_p^p \leq \\ &\leq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\lambda p} \cdot \frac{1}{2^{(1-p)\nu}} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно лемме 4,

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{\alpha, \beta - \lambda; \varepsilon}(x + 2\pi k) \right\|_p \leq C_4$$

равномерно по ε . Следовательно, по лемме 1

$$\|F_{\alpha, \beta - \lambda; \varepsilon}(x)\|_p^p \leq C_5 + \left\| \sum_{k \neq 0} F_{\alpha, \beta - \lambda; \varepsilon}(x + 2\pi k) \right\|_p^p \leq C_6,$$

также равномерно по ε .

Далее, используя лемму Фату, получаем, что $F_{\alpha, \beta - \lambda} \in L_p(\mathbb{R})$, но это противоречит нашим предположениям, поскольку при $\beta - \lambda + (\frac{1}{p} - 1) < \alpha(\frac{1}{p} - 1)$ функция $F_{\alpha, \beta - \lambda} \notin L_p(\mathbb{R})$.

Теперь рассмотрим случай $p = 1$. Предположим, что $m \in M_1$ и возьмем $\delta > 0$ так, чтобы $\beta + \delta < \frac{\alpha}{2}$. В силу сделанных выше предположений,

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|} \psi(|k|) \frac{e^{i|k|^\alpha}}{|k|^{\beta+\delta}} e^{ikt} \right\|_1 \leq C_7 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{k^\delta} \right\|_1. \quad (4)$$

Таким образом, по аналогии с проделанными выше рассуждениями, мы получим противоречие, если покажем, что правая часть неравенства (4) конечна. Последнее сразу следует из теорем 1.5 и 1.14 в [13, гл.5].

Теорема полностью доказана.

1. *Riesz F.* Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Z. – 1932. – **18**. – P. 87-95.
2. *Тригуб Р.М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Матем. сб. – 1997. – **188**, №4. – С. 145-160.
3. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer-Springer, 2004.
4. *Коломойцев Ю.С.* О модулях гладкости и K -функционалах дробного порядка в пространствах Харди // Укр. мат. вісн. – 2011. – **8**, №3. – С. 421-446.
5. *Волчков Вит.В.* О мультипликаторах степенных рядов в пространствах Харди // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, №4. – С. 585-587.
6. *Hirschman I.I.* On multiplier transformations // Duke Math. J. – 1959. – **26**. – P. 221-242.
7. *Wainger S.* Special trigonometric series in k dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. – **59**. – 1965.
8. *Fefferman Ch.* Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators // Acta Math. – 1970. – **124** – P. 9-36.
9. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973.
10. *Belinsky E. S.* Strong summability for the Marcinkiewicz means in the integral metric and related questions // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1998. – **65**. – P. 303-312.
11. *Волчков Вит.В.* Неравенство Бернштейна в пространствах Харди H^p , $0 < p < 1$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування (Каменец-Подольский, 1997), Пр. Инст. Мат. Нац. Акад. Наук Укр. Мат. Застос. – 1998. – **20**. – С. 77-84.
12. *Belinsky E., Lifyand E.* Approximation properties in L_p , $0 < p < 1$ // Functiones et Approximatio. – 1993. – **XXII**. – P. 189-199.
13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Том 1. – М.: Мир, 1965.

Yu. S. Kolomoitsev

On one sufficient condition for multipliers in Hardy space.

We show the sharpness of the theorem, which gives sufficient conditions for multipliers of power series in the Hardy spaces $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$. These sufficient conditions are given in terms of the simultaneous behavior of a function and its derivatives at infinity.

Keywords: multiplier, Hardy space $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, Bernstein's inequality.

Ю. С. Коломойцев

Про одну достатню умову для мультиплікаторів у просторах Харді.

У роботі показано точність теореми, що дає достатню умову для мультиплікаторів степеневих рядів у просторах Харді $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, в термінах спільного спадання функції-мультиплікатора та її похідних на нескінченності.

Ключові слова: мультиплікатор, простір Харді $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, нерівність Бернштейна.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
koloms1@mail.ru

Получено 11.11.11

УДК 517.977.1

©2011. А. Л. Красников

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В статье рассмотрена постановка задачи стабилизации билинейной системы. Приведен обзор методов построения стабилизирующих регуляторов для произвольных билинейных систем. Для реализации предложен метод, основанный на прямом методе Ляпунова, который рассматривает билинейную систему на ограниченном множестве состояний как линейную нестационарную систему. Предложенный метод использован для построения ПИ-регулятора билинейной системы. Приведен пример синтеза стабилизирующего регулятора для двигателя постоянного тока с внешним возбуждением.

Ключевые слова: стабилизация, билинейная система, прямой метод Ляпунова, ПИ-регулятор.

1. Введение. Билинейные системы представляют собой частный случай нелинейных систем и нашли широкое применение в задачах моделирования систем в таких областях, как теплоэнергетика, биология и экология, экономика и социология. Тем не менее, задача синтеза управления остается открытой, так как зачастую рассматриваются некоторые частные случаи и практически отсутствует общая методика синтеза.

2. Постановка задачи синтеза управления для билинейной системы. Билинейные системы являются простейшим частным случаем нелинейных систем и могут быть представлены в виде:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + N(x)u(t), \quad (1)$$

где $N(x) = (x^T N_1, x^T N_2, \dots, x^T N_n)^T$. К представлению вида (1) в окрестности некоторой точки сводится класс систем с мультипликативным управлением вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t), \quad (2)$$

частным случаем которого и является билинейная система. Так же во многих источниках отмечается связь представления билинейной системы с рядами Вольтерра.

Задача управления системой вида (1) поставлена в конце 60-х годов XX века, как задача стабилизации системы в положении устойчивости $x = 0$. В литературе приводятся решения задачи стабилизации в некоторых частных случаях и предложены процедуры синтеза управления вида $u = f(x)$ (в том числе и нелинейного), основанные на использовании прямого метода Ляпунова.

3. Задача точной линеаризации нелинейной системы для скалярного случая. Одним из методов управления для нелинейных систем вида (2) является метод линеаризации, при котором синтез управления происходит в виде $u = U(x) + L(x)\tilde{u}$, такого, что при подстановке в (2) система преобразуется к виду $\dot{x} = A_0x + b_0\tilde{u}$, а новое управляющее воздействие \tilde{u} выбирается для полученной линейной системы

[1]. В скалярном случае, когда система описывается уравнением вида $\dot{x} = ax + nxi + bu$, задача стабилизации решается регулятором вида [2]:

$$u = \frac{(-a + k)x}{nx + b}, k < 0, \quad (3)$$

который фактически линеаризует исходную систему подобно приведенному выше регулятору с параметрами $U(x) = -\frac{ax}{nx+b}, L(x) = \frac{1}{nx+b}, \tilde{u} = kx$. Хотя такое управление и обеспечивает асимптотическую устойчивость, но оно не применимо в векторном случае, т.к. вектор $N(x) + b$ в общем случае необратим и, соответственно, нельзя получить точную линеаризацию на всем пространстве состояний системы.

4. Точная линеаризация билинейной системы. Тем не менее для систем вида (2) с произвольной размерностью задача точной линеаризации билинейной системы успешно решается с помощью аппарата алгебры Ли для [3]. При этом выполняется переход к новой системе координат z и введение управления $u = U(z) + L(z)u(z)$, которое приводит систему к виду:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}. \quad (4)$$

При этом решение задачи стабилизации системы (4) выполняется любым из доступных методов управления линейными системами. Решение задачи точной линеаризации требует введения нескольких дополнительных величин.

Производная Ли от скалярной функции $\phi(x)$ по векторному полю $f(x)$ определяется как $L_f\phi(x) = \frac{\partial\phi}{\partial x}f(x)$. Так же можно задать сложные производные и производные нулевого порядка: $L_f^0\phi = \phi, L_gL_f\phi = L_g(L_f\phi), L_f^k\phi = L_f^{k-1}(L_f\phi)$. Для билинейной системы, как частного случая системы (2), производные Ли имеют вид:

$$L_f^k y_i(x) = c_i A^k x, L_g L_f^k y_i(x) = c_i A^k (N(x) + B)x.$$

Относительная степень системы по i -му выходу ρ_i задается как наибольшая степень такая, что для $k < \rho - 1, L_g L_f^k y_i(x) = 0$, для $k = \rho - 1, L_g L_f^k y_i(x) \neq 0$.

Непосредственно в задаче точной линеаризации для замены переменных выполняется преобразование: $z_j^i = L_f^j y_i(x), j = 0 \dots \rho_i$. Соответствующие матрицы $U(z), L(z)$ в управлении определяются через вспомогательные матрицы:

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_g L_f^{\rho_1-1} y_1(x) \\ L_g L_f^{\rho_2-1} y_2(x) \\ \dots \\ L_g L_f^{\rho_p-1} y_p(x) \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} L_f^{\rho_1} y_1(x) \\ L_f^{\rho_2} y_2(x) \\ \dots \\ L_f^{\rho_p} y_p(x) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$U(z) = -A^{-1}(x)b(x), L(z) = A^{-1}(x).$$

Такое преобразование существует в случае, если существует вектор относительных степеней системы ρ_1, \dots, ρ_p и $\rho_1 + \dots + \rho_p = n$. [3] Так же следует отметить, что при достаточно высокой относительной степени системы могут возникнуть определенные вычислительные сложности при расчете производных Ли высоких порядков. К сожалению, приведенные условия ограничивают область применения данного метода.

5. Задача стабилизации билинейной системы с линейной обратной связью. Аналогично линейным системам, одним из наиболее распространенных решений задачи стабилизации было построение управления вида

$$u(t) = Kx(t), \quad (6)$$

в котором выбор коэффициентов вектора обратной связи K выполняется на основании прямого метода Ляпунова. При этом производится поиск функции Ляпунова вида

$$V(x) = x^T P x, \quad (7)$$

где $P > 0$ – положительно определенная симметричная матрица. Тогда, согласно теореме Ляпунова, состояние системы $x = 0$ будет асимптотически устойчиво, если $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$. При подстановке (6) в (1) получим

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + N(x)Kx(t).$$

А функция Ляпунова будет иметь вид:

$$\dot{V}(x) = x^T((A + BK)^T P + P(A + BK))x + x^T(N(x)^T K^T P + PKN(x))x. \quad (8)$$

Отсюда явно видно, что невозможно построить матрицу P , которая позволяет достичь выполнения условия асимптотической устойчивости для всех x . Однако [4], процедура синтеза регулятора (6) линейной системы $\dot{x} = Ax + Bu$, который удовлетворяет $x^T((A + BK)^T P + P(A + BK))x < 0$, позволит достичь асимптотической устойчивости для множества $x \in \{x \mid x^T(N(x)^T K^T P + PKN(x))x = 0\}$.

6. Стабилизация системы с нелинейным регулятором. Один из вариантов дальнейшего развития такого подхода к синтезу заключается в использовании более сложного регулятора, который позволит получить отрицательно определенную производную функции Ляпунова. Так, в [5] предлагается контроллер вида

$$u(t) = -\alpha(N(x) + b)^T P x, \alpha > 0, \quad (9)$$

который после подстановки в (1) и вычисления производной функции Ляпунова (7) даст:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x - 2\alpha x^T[(N(x) + b)^T(N(x) + b) * P]x. \quad (10)$$

Дальнейшая процедура синтеза заключается в выборе матрицы P [6] и для случая, когда линейная часть системы (1) асимптотически устойчива, достаточно решения уравнения Ляпунова $A^T P + PA = -E$, так как второе слагаемое (10) отрицательно

определено для всех P . Тем не менее процедура поиска матрицы P для случая неустойчивой матрицы A достаточно сложна. Так же к недостаткам метода следует отнести отсутствие критерия выбора коэффициента α .

7. Стабилизация системы на ограниченном множестве. Другой вариант развития метода синтеза линейной обратной связи заключается в решении задачи синтеза стабилизирующего регулятора для ограниченного множества точек, которое, например, соответствует множеству состояний системы в нормативном режиме работы. Таким образом, задача синтеза обратной связи нелинейной системы рассматривается как задача синтеза линейной системы с переменными параметрами. В [7] предлагается постановка задачи синтеза линейной обратной связи (6) для системы (1) такой, что на множестве точек, описанном политопом $\chi = \text{conv}\{x_{(1)}, \dots, x_{(p)}\} = \{x \mid a_k^T x \leq 1, k = 1, 2, \dots, q\}$ с вершинами $x_{(i)}$, система будет асимптотически устойчива. Данная задача сведена к задаче решения линейных матричных неравенств (LMI) или к общей задаче на собственные значения (GEVP) в виде:

$$\begin{aligned} &0 < \gamma \leq 1, \\ &P > 0, \\ &\begin{pmatrix} 1 & \gamma a_k^T P \\ Pa_k \gamma & P \end{pmatrix}, k = 1, \dots, q, \\ &\begin{pmatrix} 1 & x_{(i)}^T \\ x_{(i)} & P \end{pmatrix}, i = 1, \dots, p, \\ &\gamma(AP + PA^T) + \gamma(BW + W^T B^T) + N(x_{(i)})W + W^T N(x_{(i)})^T < 0, i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (11)$$

В данной задаче второе и пятое неравенства являются требованиями теоремы Ляпунова и гарантируют, что выполняется $V(x) > 0, \dot{V}(x) < 0$ в вершинах политопа $\frac{1}{\gamma}\chi$ (а следовательно, и для всех точек $x \in \chi \subset \frac{1}{\gamma}\chi$). Третье и четвертое неравенства являются аналогом нормы $\|x\|_{P-1} \leq 1$ [8] и неравенств, задающих политоп, и определяют, что траектория системы ограничена и принадлежит политопу $\frac{1}{\gamma}\chi$.

Зафиксировав $\gamma = 1$ и решив задачу LMI, можно получить матрицы W и P , которые определяют матрицу коэффициентов обратной связи:

$$K = WP^{-1}. \quad (12)$$

Решение задачи GEVP и отыскание наименьшего γ помимо этого даст наибольший политоп, для которого будет выполняться условие асимптотической устойчивости. Хотя такой регулятор вполне работоспособен, в системе не компенсируются возмущения, что является типичным недостатком П-регулятора в целом.

8. Приближенная линейаризация билинейной системы. Комбинируя линейный регулятор (6) с ранее описанным регулятором, обеспечивающим линейаризацию системы в скалярном случае (2), можно ввести нелинейное управление, которое обеспечивает приближенную линейаризацию системы. Попробуем свести систему (1) к виду $\dot{x} = Ax + \tilde{u} = Ax + Kx$. Тут возможны два варианта: если размерность вектора управления не меньше размерности вектора состояния, то введя управление

$u = (N(x) + b)^T \{(N(x) + b)(N(x) + b)^T\}^{-1} Kx$, получим точную линеаризацию (при условии существования обратной матрицы $\{(N(x) + b)(N(x) + b)^T\}^{-1}$), в противном случае такая линеаризация невозможна. Тем не менее, можно построить наиболее близкий в смысле наименьших квадратов к $Kx = (N(x) + b)u$ регулятор вида

$$u = \{(N(x) + b)^T (N(x) + b)\}^{-1} (N(x) + b)^T Kx, \quad (13)$$

который дает точную линеаризацию возле положения устойчивости $x = 0$. При подстановке (13) в (1) получим

$$\dot{x} = Ax + (N(x) + b)\{(N(x) + b)^T (N(x) + b)\}^{-1} (N(x) + b)^T Kx = Ax + F(x)Kx. \quad (14)$$

Для выбора матрицы K регулятора, который обеспечивает устойчивость системы на ограниченном множестве χ , можно поставить задачу ЛМІ аналогично (11) в виде:

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ AP + PA^T + K^T F(x)_{(i)}^T P + PF(x)_{(i)} K &< 0, i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (15)$$

Домножив второе неравенство слева и справа на P^{-1} , получим конечную запись:

$$\begin{aligned} Q &> 0, \\ QA + A^T Q + W^T F(x)_{(i)}^T + F(x)_{(i)} W &< 0, i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (16)$$

Решая задачу ЛМІ в виде (14), найдем матрицы W и Q . Соответственно управление будет иметь вид (13), где

$$K = W * Q^{-1}. \quad (17)$$

Основные недостатки такого алгоритма: необходимость определения диапазона значений $F(x)$, что является отдельной задачей обращения интервальной матрицы, а так же невозможность расчета управления, если отсутствует обратная матрица $\{(N(x) + b)^T (N(x) + b)\}^{-1}$.

9. Синтез ПИ-регулятора. Как отмечено выше, простейший П-регулятор может не обеспечивать заданных показателей точности при наличии возмущающих воздействий. Так же следует отметить, что такой регулятор не решает задачи стабилизации выхода системы в произвольном положении $y = \tilde{y}$, которая формализуется, как задача компенсации внешнего воздействия при управлении ошибкой. В этом случае ставится задача стабилизации ошибки $e = 0$, а возмущение дополняется заданным положением системы \tilde{y} .

Анализируя методы управления возмущенными линейными системами, можно выделить два основных подхода: введение в структуру регулятора компенсатора [10], как прямой связи по возмущению, или построение ПИ/ПИД-регулятора [11], в котором интегральная составляющая полностью компенсирует внешнее возмущение.

Решая задачу стабилизации билинейной системы, остановимся именно на ПИ-регуляторе, т.к. компенсатор, являясь управлением по прямой связи, требует точного знания параметров системы и возмущающих воздействий, а так же в процессе

синтеза требует расчета установившегося значения ошибки, что для нелинейных систем связано с определенными трудностями.

Для синтеза ПИИ-регулятора билинейной системы воспользуемся комбинацией методов синтеза ПИИ-регулятора линейной системы [11] и П-регулятора билинейной системы на ограниченном множестве состояний [7]. Такой подход позволит получить достаточно простую для реализации структуру управляющей системы, по сравнению с линеаризирующими регуляторами.

Для ПИИ-регулятора закон регулирования дополняется интегральной частью по выходу системы:

$$u(t) = K_p x(t) + K_i \int_0^t y(\tau) d\tau. \quad (18)$$

В данном случае интегральная составляющая закона управления выделяется как отдельная переменная $z(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$ такая, что $\dot{z}(t) = Cx(t)$, и система (1) с уравнением выхода $y(t) = Cx(t)$ расширяется до

$$\begin{aligned} z' \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0_{n \times p} \\ C & 0_{n \times p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B + N(x) \\ 0_{m \times p} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} D(t)w(t) \\ 0_{p \times 1} \end{pmatrix}, \\ y(t) &= (C \quad 0_{p \times p}) \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Соответствующий П-регулятор системы (12) вида $u(t) = K \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ является ПИИ-регулятором системы (1), т.е. $K = (K_p \quad K_i)$.

10. Пример синтеза. Для примера возьмем модель двигателя постоянного тока с внешним возбуждением: [9]

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{D}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{K_a}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_y}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} i_\epsilon + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U, y = \theta, \quad (20)$$

где $\begin{bmatrix} i \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = x$ – сила тока статора, угол поворота, скорость вращения, которые обра-

зуют вектор состояния, $\begin{bmatrix} i_\epsilon \\ U \end{bmatrix} = u$ – ток возбуждения и напряжение статора, R_a, L_a – сопротивление и индуктивность статора, K_a, K_y – характеристики двигателя, J – момент инерции, D – коэффициент демпфирования. Заданную систему можно переписать в виде (1) с матрицами коэффициентов:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{D}{J} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, c = [0 \quad 1 \quad 0] \\ N_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{K_a}{L_a} & 0 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} \frac{K_y}{J} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Матрица A системы имеет одно нулевое собственное значение, следовательно система изначально не является асимптотически устойчивой. Поставим задачу стабилизации в $x = 0$ для двигателя в режиме работы, при котором $-i_c < i < i_c$, $-\theta_c < \theta < \theta_c$, $-\omega_c < \omega < \omega_c$ (в общем случае границы могут быть несимметричны относительно положения устойчивости). В качестве дополнительного требования к системе поставим ограничение на скорость переходного процесса. Для этого в системе матричных неравенств (14) производится замена 0 в правой части на $-2\alpha Q$, где α – требуемые собственные числа системы. Соответственно время переходного процесса будет $t_p \leq \frac{3}{\alpha}$ с. Процедура синтеза выглядит следующим образом:

1. На основе ограничений сформировать политоп $\chi = \{(\pm i_c, \pm \theta_c, \pm \omega_c)\}$.
2. Записать систему матричных неравенств (11) с учетом структуры расширенной системы (19).
3. Найти Q и W – решение полученной системы матричных неравенств.
4. Рассчитать по (15) матрицу коэффициентов обратной связи (11).

Выполним процедуру синтеза в среде MATLAB при значениях коэффициентов $R_a = 100$ Ом, $L_a = 2$ Гн, $K_a = 22$, $K_y = 17.5$, $J = 69$ кгм², $D = 1.5$. Предельные значения для нормативного режима работы двигателя возьмем $i_c = 1$ А, $\theta_c = 5$ рад, $\omega_c = 2$ об/с. Длительность переходного процесса $t_p < 1$ с, т.е. $\alpha = 3$. Решение задачи LMI имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 0.007 & 0 & -0.0217 & 0.0429 \\ 0 & 1.2948 & 0 & 0 \\ -0.0217 & 0 & 0.0886 & -0.2693 \\ 0.0429 & 0 & -0.2693 & 1.6862 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0377 & 0 & -0.2322 & -9.7555 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Соответственно,

$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -130.2158 & -19.4925 \end{bmatrix}, K_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -278.3161 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Переходной процесс в системе представлен на рис. 1 и 2.

Как видно из графиков, система приходит в требуемое положение устойчивости $x = 0$ за отведенное время. Вводя возмущающее воздействие и синтезируя П- и ПИ-регуляторы для управления углом поворота якоря, получим изменение выходной величины в виде (рис. 3).

Синтез ПИ-регулятора позволил получить высокую точность стабилизации системы с квазистационарным шумом.

11. Выводы. В статье рассмотрена задача синтеза регулятора билинейной системы и рассмотрены некоторые методы решения данной задачи. На основе прямого метода Ляпунова рассмотрена постановка задачи синтеза регулятора, как задачи

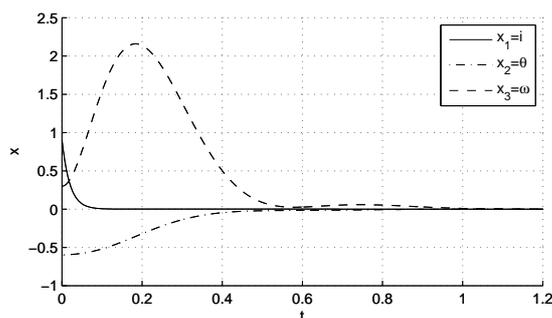


Рис. 1. Изменение переменных состояния (ПИ-регулятор)

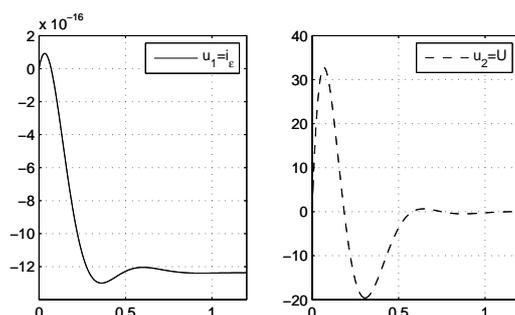


Рис. 2. Изменение управляющего воздействия (ПИ-регулятор)

решения системы матричных неравенств. Приведена процедура синтеза линейного регулятора для билинейной системы на ограниченном множестве состояний, заданном политопом. На основе рассмотренной процедуры синтеза регулятора предложен алгоритм синтеза ПИ-регулятора с заданными свойствами. Предложенный метод реализован в среде MATLAB для билинейной системы управления двигателем постоянного тока. Результаты моделирования показали работоспособность метода и выполнение заданных ограничений на время переходного процесса для П- и ПИ-регуляторов, а так же компенсацию возмущения в случае использования ПИ-регулятора.

1. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. – СПб.: Питер, 2006 – 272 с.
2. *Mohler R.R.* Bilinear control processes: with applications to engineering, ecology, and medicine – NY: Academic Press, 1973 – 224 с.
3. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. – London: Springer-Verlag, 1995. – 549 с. – 374 с.
4. *Pedrycz W.* Stabilization of bilinear systems by a linear feedback control // *Kybernetika*, vol. 16. – 1980. – С. 48-53
5. *Gutman P.-O.* Stabilizing controllers for bilinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) – 1981. – С. 917-922.
6. *Tibken B., Lehn F., Hofer E.P.* Quadric control Lyapunov functions for bilinear systems // *Conference on Communications and Control*, Athens, Greece, 28 Jun – 2 Jul 1999. – 9 с.

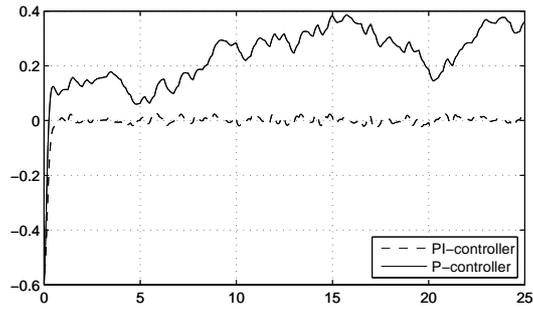


Рис. 3. Изменение выходной переменной (П- и ПИ-регуляторы)

7. Amato F., Cosentino C., Merola A. Stabilization of Bilinear Systems via Linear State Feedback Control // IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs 56(1). – 2009 – С. 76-80.
8. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory – Philadelphia: SIAM Press, 1994. – 193 с.
9. Pardalos P.M., Yatsenko V.A. Optimization and Control of Bilinear Systems – NY: Springer, 2006. – 374 с.
10. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами – М.: Наука, 1976. – 424 с.
11. Острём К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ – М.: Мир, 1987. – 480 с.

A. Krasnikov

Solution to the problem of stabilization of the bilinear system.

The article considers the problem of stabilization of the bilinear system. An overview of methods for constructing stabilizing controllers for arbitrary bilinear systems was given. Method based on Lyapunov's direct method, which considers the bilinear system on a limited set of states as a linear nonstationary system the proposed to implement. The proposed method used to construct PI controller of bilinear system. An example of the synthesis of a stabilizing controller for DC motor with an external excitation.

Keywords: stabilization, bilinear system Lyapunov's Direct Method, PI controller.

О. Красніков

Розв'язання задачі стабілізації білінійної системи.

У статті розглянуто постановку задачі стабілізації білінійної системи. Наведено огляд методів побудови стабілізуючих регуляторів для довільних білінійних систем. Для реалізації запропоновано метод, заснований на прямому методі Ляпунова, який розглядає білінійну систему на обмеженій множині станів як лінійну нестационарну систему. Запропонований метод використано для побудови ПИ-регулятора білінійної системи. Наведено приклад синтезу стабілізуючого регулятора для двигуна постійного струму із зовнішнім збудженням.

Ключові слова: стабілізація, білінійна система, прямий метод Ляпунова, ПИ-регулятор.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
 zzakkatt@gmail.com

Получено 30.11.11

УДК 517.9

©2011. М. В. Краснощок

КЛАСИЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ У ПРУЖНОМУ ТІЛІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Досліджено задачу, яку можна розглядати як узагальнення однофазової квазістаціонарної задачі Стефана, що враховує кривизну вільної межі. Доведено існування класичного розв'язку початково-крайової задачі з вільною межею для стаціонарної системи пружності та рівняння Лапласа. Використано метод побудови регуляризатора та теорему про нерухому точку стискального відображення.

Ключові слова: вільна межа, пружність, оцінки Шаудера.

1. Вступ. Нехай Ω – обмежена область в \mathbb{R}^2 з границею S ; $\gamma(t)$ – замкнена крива, яка розподіляє Ω на дві підобласті $\Omega_+(t)$ і $\Omega_-(t)$ таким чином, що $\partial\Omega_-(t) = S \cup \gamma(t)$, $\partial\Omega_+(t) = \gamma(t)$, $\gamma(0) = \Gamma$, $\Omega_\pm(0) = \Omega_\pm$. Позначимо також $Q_\tau^\pm = \{(x, t) : x \in \Omega_\pm(t), t \in (0, \tau)\}$, $\gamma_\tau = \{(x, t) : x \in \gamma(t), t \in (0, \tau)\}$, $S_\tau = S \times (0, \tau)$, $\Gamma_\tau = \Gamma \times (0, \tau)$, $\Omega_\tau^\pm = \Omega_\pm \times (0, \tau)$, $\Omega_\tau = \Omega \times (0, \tau)$.

Для вектор-функції $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ визначимо ($\nu \in (0, 1/2)$, $E > 0$):

$$L_0 u = \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot u) + \Delta u, \quad \sigma_{ij}(u) = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}(u) + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon(u) \delta_{ij} \right), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon(u) = \varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u),$$

а також вектор $\sigma_n(u)$ з компонентами $\|\sigma_{ij}(u)n_j\|_{1 \leq i \leq 2}$, де n – нормаль до $\gamma(t)$, спрямована всередину $\Omega_+(t)$. Тут і всюди далі за повторюваними індексами виконується підсумовування від 1 до 2.

Розглянемо задачу (див. [1], [2]): знайти вектор-функції $u^+(x, t)$, $u^-(x, t)$, функцію $v(x, t)$ і вільну межу $\gamma(t)$ за умовами

$$L_0 u^\pm = 0, \quad (x, t) \in Q_\tau^\pm, \quad (2)$$

$$\Delta v = 0, \quad (x, t) \in Q_\tau^-, \quad (3)$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \quad u^- = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n_S} = 0, \quad (x, t) \in S_\tau, \quad (4)$$

$$[u] = 0, \quad [\sigma_n(u)] = \sigma_n^0, \quad (x, t) \in \gamma_\tau, \quad (5)$$

$$v = \varkappa + G(u), \quad V_n = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (x, t) \in \gamma_\tau, \quad (6)$$

де n_S – одинична нормаль до S , $[u] = u^+ - u^-$ (аналогічно для $\sigma_n(u)$), V_n – швидкість вільної межі у напрямку n , \varkappa – кривизна кривої $\gamma(t)$, $\sigma_n^0 = (\sigma_{1j}^0 n_j, \sigma_{2j}^0 n_j)$, $G(u) = \frac{l}{2}((\sigma_{ij}(u^+) - \sigma_{ij}^0)(\varepsilon_{ij}(u^+) - \varepsilon_{ij}^0) - \sigma_{ij}(u^-) \varepsilon_{ij}(u^-) + 2\sigma_{ij}(u^-)(\varepsilon_{ij}(u^-) - \varepsilon_{ij}(u^+)))$, де $l > 0$, а σ_{ij}^0 та ε_{ij}^0 – задані сталі, зв'язані між собою співвідношеннями (1).

Зауважимо, що виконуючи прості алгебраїчні перетворення, можна довести, що, внаслідок умов (5), функція $G(u)$ набуває наступного вигляду

$$G(u) = -l\sigma_{ij}^0\varepsilon_{ij}(u^-) - \frac{l}{2}\sigma_{ss}^0\varepsilon_{ss}^0,$$

де $\sigma_{ss}^0 = \sigma_{ij}^0 s_i s_j$, $\varepsilon_{ss}^0 = \varepsilon_{ij}^0 s_i s_j$, $s = (s_1, s_2)$ – дотична до $\gamma(t)$. Як і в [2], для прикладу, будемо вважати, що $\varepsilon_{ij}^0 = \delta_{ij}$, тоді $\varepsilon_{ss}^0 = 1$, $\sigma_{ss}^0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ і

$$G(u) \equiv G(u^-) = -\sigma_{ss}^0 l \left(\varepsilon(u^-) + \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

Система (2), (3), (5), (6) є моделлю фазових перетворень у пружному середовищі (див. [1], [2]), в якій переміщення u^+ і u^- описують, відповідно, пружний стан "частинки" і "матриця а концентрація v – дифузюю у "матриці". Дану систему можна охарактеризувати як задачу з вільною межею для еліптичної системи з еволюційною граничною умовою. Дослідженню задач такого типу присвячено, наприклад, роботи [3]-[8] – для еліптичних рівнянь, [9]-[10] – для системи Стокса і [11] – для системи теорії пружності (див. також [12]). У даній роботі доведено існування класичного розв'язку задачі (2)-(7).

2. Функціональні простори. Основний результат. Позначимо через $\langle u \rangle_{x, Q_\tau}^{(\alpha)}$ і $\langle u \rangle_{t, Q_\tau}^{(\alpha)}$ константи Гельдера з показником $\alpha \in (0, 1)$ функції u відповідно за змінними x і t у деякій області Q_τ (див. [13], с. 16). Далі введемо для функцій неперервних в Q_τ^+ (аналогічно в Q_τ^- , Ω_τ^\pm , \mathbb{R}_τ^1) наступні півнорми ($\alpha, \beta \in (0, 1)$):

$$[u]_{Q_\tau^+}^{(\alpha, \beta)} = \sup_{t, t' \in (0, \tau)} \sup_{x, x' \in \Omega(t) \cap \Omega(t')} \frac{|u(x, t) - u(x, t') - u(x', t) + u(x', t')|}{|x - x'|^\alpha |t - t'|^\beta},$$

$$\langle \langle u \rangle \rangle_{Q_\tau^+}^{(\alpha, \beta)} = \langle u \rangle_{x, Q_\tau^+}^{(\alpha)} + \langle u \rangle_{t, Q_\tau^+}^{(\beta)} + [u]_{Q_\tau^+}^{(\alpha, \beta)}.$$

При $k = 0, 1, 2, \dots$ введемо $\mathcal{E}^{k+\alpha, \beta}(Q_\tau)$ (див. [3]), як простір функцій із скінченною нормою

$$|u|_{Q_\tau}^{(k+\alpha, \beta)} = \sum_{|j| \leq k} \sup_{Q_\tau} |D_x^j u| + \sum_{|j| \leq k} \langle \langle D_x^j u \rangle \rangle_{Q_\tau}^{(\alpha, \beta)}.$$

Через $\mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}(\mathbb{R}_\tau^1)$ позначимо функціональний простір з нормою

$$\|u\|_{\mathbb{R}_\tau^1}^{(4+\alpha, \alpha/3)} = \sum_{3k+l \leq 4} |D_{x_1}^k D_t^l u|_{\mathbb{R}_\tau^1}^{(\alpha, \alpha/3)} + \sum_{3k+l \leq 4} \langle \langle D_{x_1}^k u \rangle \rangle_{t, \mathbb{R}_\tau^1}^{(\frac{4+\alpha-k}{3})}.$$

Будемо говорити, що крива Γ належить до класу $C^{k+\alpha}$ ($k = 1, 2, \dots$), якщо кожна точка $\xi \in \Gamma$ має окіл, в якому Γ є графіком функції класу $C^{k+\alpha}$ і, значить, існує дифеоморфізм Z_ξ , який спрямлює дану криву поблизу точки ξ . Відповідно належність функції $u(x, t)$ до простору $\mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$ означатиме, що локально функція

$(Z_\xi^{-1}u)(z, t)$, де $(z, t) \in \mathbb{R}_\tau^1$, належатиме до класу $\mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}$. У свою чергу сім'я кривих γ_τ належить до класу $\mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}$, якщо існує параметризація (див. нижче (9)) $\gamma(t) = \{(x, t) : x = \Upsilon(\xi, t), \xi \in \Gamma\}$ така, що $\Upsilon \in \mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$.

Запис $u \in \mathcal{E}_0^{k+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau)$ ($u \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$) означатиме, що $u \in \mathcal{E}^{k+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau)$ ($u \in \mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$) і $u|_{t=0} = 0$; якщо ж $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$, тоді $u \in \mathcal{P}_{00}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$. Якщо для вектора $u = (u_1, u_2)$, наприклад, $u_i \in \mathcal{E}_0^{3+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau)$, $i = 1, 2$, тоді, для скорочення запису, домовимося писати $u \in \mathcal{E}_0^{3+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau)$.

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $\Gamma \in C^{6+\alpha}$, $S \in C^{5+\alpha}$, тоді для достатньо малого τ існує єдиний класичний розв'язок задачі (2)-(7), причому $u^\pm \in \mathcal{E}^{3+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^\pm)$, $v \in \mathcal{E}^{2+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^-)$, $\gamma_\tau \in \mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}$.*

У подальшому розгляді нам знадобиться інтерполяційна нерівність (див. с. 43 монографії [14]):

$$|u|_Q^{(q)} \leq C \left(|u|_Q^{(r)} \right)^{\frac{q-p}{r-p}} \left(|u|_Q^{(p)} \right)^{\frac{r-q}{r-p}}, \quad (8)$$

де $|u|_Q^{(q)}$ – норма у просторі $C^q(Q)$, $0 \leq p < q < r$, стала C залежить від p, q, r, Q .

3. Зведення до задачі в зафіксованих областях. Нехай $\xi \in \Gamma$ і $n_0(\xi)$ – одинична нормаль до Γ . Вважаємо, що для достатньо малого λ_0 існує окіл \mathcal{N} кривої Γ такий, що кожну точку $x \in \mathcal{N}$ можна єдиним способом записати у вигляді $x = \xi + \lambda n_0(\xi)$, $|\lambda| \leq \lambda_0$, причому λ є регулярною функцією змінної x (див. [3]). Для достатньо малих значень t вільна межа $\gamma(t)$ міститься в \mathcal{N} і може бути задана рівнянням $\lambda = \rho(\xi, t)$, тобто

$$\gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \xi + \rho(\xi, t)n_0(\xi) \quad \xi \in \Gamma\}. \quad (9)$$

Позначимо через $N(x)$ і $\rho_*(\xi, t)$ продовження із збереженням класу векторного поля $n_0(\xi)$ і функції $\rho(\xi, t)$ з Γ на Ω , а саме: $N \in C^{5+\alpha}(\Omega)$, $\rho_* \in \mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Omega_\tau)$, якщо $n_0 \in C^{5+\alpha}(\Gamma)$, $\rho \in \mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$ (див. [15], а також леми про продовження в §6.9 монографії [16]).

Далі визначимо перетворення координат ([3], [15]) $e_\rho : \Omega_\pm \rightarrow \Omega_\pm(t)$ за допомогою формул

$$x = e_\rho(y, t) \equiv y + N(y)\rho_*(y, t), \quad y \in \Omega.$$

Елементи його матриці Якобі мають вигляд $J_{km} = \delta_{km} + \frac{\partial(N_k r)}{\partial y_m}$. Позначимо через J^T – транспоновану матрицю, J^{-1} – обернену матрицю з елементами $\{J^{km}\}_{1 \leq k, m \leq 2}$, $J^{-T} = (J^{-1})^T$. Зазначимо, що $J|_{t=0} = I$, де I одинична матриця.

Маємо (див. [15], [17])

$$\nabla_x|_{x=e_\rho(y,t)} \equiv \nabla_\rho = J^{-*} \nabla_y, \quad n_\rho = \frac{J^{-*} n_0}{|J^{-*} n_0|}, \quad V_n = \frac{(N \cdot J^{-T} n_0)}{|N \cdot J^{-T} n_0|} \rho_t.$$

Таким чином, у координатах $\{y\}$, для невідомих функцій $U^\pm(y, t) = u^\pm(e_\rho(y, t), t)$, $V(y, t) = v(e_\rho(y, t), t)$, $\rho(y, t)$ задача (2)-(7) набуває вигляду

$$\begin{aligned} L_\rho U^\pm &= 0, \quad (y, t) \in Q_\tau^\pm, \\ \Delta_\rho V &= 0, \quad (y, t) \in Q_\tau^-, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \rho|_{t=0} &= 0, \quad y \in \Gamma, \quad U^- = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n_S} = 0, \quad (y, t) \in S_\tau, \\ [U] &= 0, \quad [\sigma_{n_\rho}(U)] = \sigma_{n_\rho}^0, \quad (y, t) \in \gamma_\tau, \\ V &= \varkappa n_\rho + G_\rho(U^-), \quad \rho_t = H_\rho(V), \quad (y, t) \in \gamma_\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} L_\rho U^\pm &= \frac{1}{1-2\nu} \nabla_\rho(\nabla_\rho \cdot U) + \nabla_\rho^2 U, \quad \Delta_\rho V = \nabla_\rho^2 V, \\ \sigma_{n_\rho}(U) &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2}(\nabla_\rho U + (\nabla_\rho U)^T) + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla_\rho \cdot U)I \right] J^{-T} n_0, \\ \sigma_{n_\rho}^0 &= \sigma_{ss}^0 J^{-T} n_0, \quad G_\rho(U^-) = -l \sigma_{ss}^0 ((\nabla_\rho \cdot U) + 1/2), \\ H_\rho(V) &= \frac{(J^{-T} n_0 \cdot \nabla_\rho V)}{(N \cdot J^{-T} n_0)}, \quad \varkappa_\rho = -(\nabla \cdot n) = -(\nabla_\rho \cdot n_\rho). \end{aligned} \quad (12)$$

4. Лінеаризація. Значення функцій U^\pm, V при $t = 0$, тобто $U_0^\pm = U^\pm|_{t=0}, V_0 = V|_{t=0}$ знаходяться наступним чином. Спочатку побудуємо функції $U_0^\pm \in C^{4+\alpha}(\Omega_\pm)$ за умовами

$$\begin{aligned} L_0 U_0^\pm &= 0, \quad y \in \Omega_\pm, \\ U_0^- &= 0, \quad y \in S, \quad [U_0] = 0, \quad [\sigma_{n_0}(U_0)] = \sigma_{n_0}^0, \end{aligned}$$

а потім функцію $V_0 \in C^{3+\alpha}(\Omega_-)$ таку, що

$$\begin{aligned} \Delta V_0 &= 0, \quad y \in \Omega_-, \\ \frac{\partial V_0}{\partial n_S} &= 0, \quad y \in S, \quad V = \varkappa_0 + G_0(U_0^-), \quad y \in \Gamma. \end{aligned}$$

Існування функцій U^\pm випливає з результатів [18], [19, ч.1], а функції V_0 – розділу 6 монографії [16].

Для подальшої лінеаризації на початкових даних задачі (10)-(12), зробимо заміну $U^\pm = U_0^\pm + \rho_*(N \cdot \nabla)U_0^\pm + \mathcal{U}^\pm, V = V_0 + \rho_*(N \cdot \nabla)V_0 + \mathcal{V}$, де $\mathcal{U}^\pm, \mathcal{V}$ – нові невідомі функції (див. [3]). Далі введемо "варіації" функцій і операторів, що залежать від ρ (див. [15]), наприклад, $\delta L_0 = \frac{d}{d\rho} L_{\mu\rho}|_{\mu=0}$, аналогічно $\delta \Delta_0, \delta \sigma_{n_0}, \delta \sigma_{n_0}^0, \delta \varkappa_0, \delta G_0, \delta H_0$.

Користуючись формулами, одержаними в роботі [15], маємо

$$\delta J_{0,km} = \frac{\partial(N_k \rho_*)}{\partial y_m}, \quad \delta J_0^{km} = -\frac{\partial(N_k \rho_*)}{\partial y_m}, \quad \frac{\partial J^{km}}{\partial y_i} = -J^{kj} \frac{\partial^2(N_k \rho_*)}{\partial y_i \partial y_j} J^{qm}.$$

Отже отримуємо

$$\delta L_0 U_0^\pm = -L_0(\rho_*(N \cdot \nabla)U_0^\pm), \quad \delta \Delta_0 = -\Delta(\rho_*(N \cdot \nabla)V_0),$$

$$\delta \varkappa_0 = \Delta_\Gamma \rho - \varkappa_0^2 \rho, \quad \delta G_0(U_0^-) = -G_0(\rho_*(N \cdot \nabla)U_0^-) - \sigma_{ss}^0 l \rho_* N_k \frac{\partial^2 U_{0,i}^-}{\partial y_k \partial y_i},$$

$$\delta H_0(V_0) = -H_0(\rho_*(N \cdot \nabla)V_0) + \rho_* \frac{\partial^2 V_0}{\partial n_0^2} - (\nabla V_0 \cdot \nabla_\gamma \rho_*),$$

$$\delta \sigma_{n_0}(U_0^\pm) = -\sigma_{n_0}(\rho_*(N \cdot \nabla)U_0^\pm) + b_1(\rho_*), \quad \delta \sigma_{n_0}^0 = -\sigma_{ss}^0 \nabla \rho,$$

де $b_1(\rho_*)$ – вектор з компонентами $\| -\sigma_{ij}(U_0^\pm) \frac{\partial \rho_*}{\partial y_j} + \rho_* n_{0,j} N_k \frac{\partial \sigma_{ij}(U_0^\pm)}{\partial y_k} \|_{1 \leq i \leq 2}$.

Після відповідних перетворень задачу (10)-(12) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} L_0 \mathcal{U}^\pm &= \mathcal{F}^\pm(\rho, \mathcal{U}^\pm), \quad (y, t) \in Q_\tau^\pm, \\ \Delta \mathcal{V} &= \tilde{\mathcal{F}}(\rho, \mathcal{V}), \quad (y, t) \in Q_\tau^-, \\ \mathcal{U}^- &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_S} = 0, \quad (y, t) \in S_\tau, \quad \rho(y, 0) = 0, \quad y \in \Gamma, \\ [\mathcal{U}] &= \mathcal{J}(\rho), \quad [\sigma_{n_0}(\mathcal{U})] = \mathcal{B}_1(\rho) + \mathcal{B}_2(\rho, \mathcal{U}), \quad (y, t) \in \Gamma_\tau, \\ \mathcal{V} - G_0(\mathcal{U}^-) - \Delta_\Gamma \rho &= \mathcal{G}_1(\rho) + \mathcal{G}_2(\rho, \mathcal{U}^-), \quad (y, t) \in \Gamma_\tau, \\ \rho_t - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_0} &= \mathcal{H}_1(\rho) + \mathcal{H}_2(\rho, \mathcal{V}) + \psi(V_0), \quad (y, t) \in \Gamma_\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\pm(\rho, \mathcal{U}^\pm) &= -(L_\rho - L_0 - \delta L_0) U_0^\pm - (L_\rho - L_0)(\rho_*(N \cdot \nabla) U_0^\pm + \mathcal{U}^\pm), \\ \tilde{\mathcal{F}}(\rho, \mathcal{V}) &= -(\Delta_\rho - \Delta - \delta \Delta_0) V_0 - (\Delta_\rho - \Delta)(\rho_*(N \cdot \nabla) V_0 + \mathcal{V}), \\ \mathcal{J}(\rho) &= -\rho_* [(n_0 \cdot \nabla) U_0], \quad \mathcal{B}_1(\rho) = b_1(\rho_*) + \delta \sigma_{n_0}^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2(\rho, \mathcal{U}) &= -[(\sigma_{n_\rho} - \sigma_{n_0} - \delta \sigma_{n_0})(U_0) + (\sigma_{n_\rho} - \sigma_{n_0})(\rho_*(N \cdot \nabla) U_0^\pm + \mathcal{U}^\pm)] + \\ &+ \sigma_{n_\rho}^0 - \sigma_{n_0}^0 - \delta \sigma_{n_0}^0, \quad \mathcal{G}_1(\rho) = -\sigma_{ss}^0 l/2 - \sigma_{ss}^0 l \rho_* \frac{\partial(\nabla \cdot U_0^-)}{\partial n_0} - \varkappa_0^2 \rho_*, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(\rho, \mathcal{U}^-) &= \varkappa_\rho - \varkappa_0 - \delta \varkappa_0 + (G_\rho - G_0)(\rho_*(N \cdot \nabla) U_0^- + \mathcal{U}^-), \\ \psi(V_0) &= H_0(V_0), \quad \mathcal{H}_1(\rho) = \rho_* \frac{\partial^2 V_0}{\partial n_0^2} - (\nabla V_0 \cdot \nabla_\Gamma \rho_*), \\ \mathcal{H}_2(\rho, \mathcal{V}) &= (H_\rho - H_0 - \delta H_0)(V_0) + (H_\rho - H_0)(\rho_*(N \cdot \nabla) V_0 + \mathcal{V}). \end{aligned}$$

5. Лінійна задача. Спочатку розглянемо наступну задачу для оператора Лапласа з динамічною крайовою умовою

$$\begin{aligned} \Delta v &= \psi, \quad (x, t) \in Q_\tau^-, \\ \frac{\partial v}{\partial n_S} &= 0, \quad (x, t) \in S_\tau, \quad \rho(x, 0) = 0, \quad x \in \Gamma, \\ v - \Delta_\Gamma \rho &= \phi, \quad (x, t) \in \Gamma_\tau, \\ \rho_t - \frac{\partial v}{\partial n_0} &= \varphi, \quad (x, t) \in \Gamma_\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\psi \in \mathcal{E}_0^{\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^-)$, $\phi \in \mathcal{E}_0^{2+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$, $\varphi \in \mathcal{E}^{1+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$. Задача (15) різними методами досліджувалася, наприклад, у роботах [3], [6], [8]. У даній роботі використовується метод побудови регуляризатора (див. [6], [13], [20], [7]), а також деякі підходи роботи [3].

Нагадаємо деякі поняття з §4 розділу 4 монографії [13]. Нехай області $\omega^{(k)}$, $\Omega^{(k)}$ покривають область Ω таким чином, що частина кривої $\Gamma^{(k)} = \Gamma \cap \omega^{(k)}$ задається у локальній системі координат рівнянням $y_2 = F^{(k)}(y_1)$. Якщо $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - F^{(k)}(y_1)$, тоді через Z_k позначимо оператор, який локально зіставляє кожній функції $u(z)$ ту саму функцію при переході від координат $\{z\}$ до вихідних координат $\{x\}$. Окрім того, нехай за допомогою функцій $\zeta^{(k)}$, $\eta^{(k)}$, побудовано розбиття одиниці в Ω , тобто $\sum_k \zeta^{(k)}(x) \eta^{(k)}(x) = 1$, $x \in \Omega$.

Далі наступну модельну задачу, із розв'язання якої встановлено класи регулярності задачі (15):

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad (z, t) \in \Pi_\tau, \\ \rho(z, 0) &= 0, \quad z \in \Sigma, \\ v - \rho_{z_1 z_1} &= 0, \quad (z, t) \in \Sigma_\tau, \\ \rho_t + v_{z_2} &= \varphi, \quad (z, t) \in \Sigma_\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

де $\Pi = \{z \in \mathbb{R}^2 : z_2 > 0\}$, $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^2 : z_2 = 0\}$.

Лема 1. Нехай $\varphi \in \mathcal{E}^{1+\alpha, \alpha/3}(\Sigma_\tau)$, тоді існує єдиний розв'язок задачі (16) такий, що $v \in \mathcal{E}_0^{2+\alpha, \alpha/3}(\Sigma_\tau)$, $\rho \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha, \alpha/3}(\Sigma_\tau)$.

Як і в роботі [3], доведення даної лема засновано на представленні функції ρ у вигляді інтеграла

$$\rho(z_1, t) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^1} G(z_1 - \xi_1, t - s) \varphi(\xi_1, s) d\xi_1,$$

де $G(z_1, t) = \int_0^\infty \exp(-t\lambda^3) \cos(\lambda z_1) d\lambda$ при $t > 0$ і $G(z_1, t) = 0$ при $t < 0$. За допомогою методу інтегрування частинами (див. [3]), одержуємо оцінки ядра $G(z_1, t)$:

$$|D_t^k D_{z_1}^l G(z_1, t)| \leq C t^{-\frac{3k+l+1}{3}} \frac{1}{1 + (z/t^{1/3})^{3k+m(k)+l+1}},$$

де $m(k) = 1$, якщо $k = 0$ або k парне число, і $m(k) = 0$, якщо k – непарне.

Лема 2. Нехай $\vartheta_0 \in {}^{1+\alpha}(\Gamma)$, тоді існує функція $\rho_0 \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$ така, що $\rho_{0,t}(x, 0) = \vartheta_0(x)$ при $x \in \Gamma$.

Доведення. Позначимо через \mathfrak{N}_Γ множину індексів k таких, що $\omega^{(k)} \cap \Gamma \neq \emptyset$. Зобразимо функцію ϑ_0 у вигляді $\vartheta_0 = \sum_{k \in \mathfrak{N}_\Gamma} \eta^{(k)} Z_k \theta_k$, де $\theta_k(z) = Z_k^{-1}(\zeta^{(k)}) \vartheta_0$.

Розглянемо задачі виду (16), в яких $\varphi = \theta_k$ і позначимо розв'язки цих задач через $p_k(z_1, t)$. Введемо функцію $\rho_0 = \sum_{k \in \mathfrak{N}_\Gamma} \eta^{(k)} Z_k p_k$. Очевидно, що $\rho_{0,t}(x, 0) = \vartheta_0(x)$ при $x \in \Gamma$ і

(див. попередню лему) $\rho_0 \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$. \square

Далі, використовуючи класичну теорію еліптичних рівнянь другого порядку (див., наприклад, розділ 6 монографії [16]), достатньо розглянути задачу (15) у випадку $\psi = \phi = 0$.

Позначимо через \mathbb{D} оператор, який зіставляє функції $f \in \mathcal{E}^{2+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$ нормальну похідну $\mathbb{D}f = \frac{\partial v_f}{\partial n_S}|_\Gamma$ розв'язку v_f крайової задачі

$$\begin{aligned} \Delta v_f &= 0, \quad (x, t) \in Q_\tau^-, \\ \frac{\partial v_f}{\partial n_S} &= 0, \quad (x, t) \in S_\tau, \quad v_f = f, \quad (x, t) \in \Gamma_\tau. \end{aligned}$$

Таким чином, задачу (15) (де $\psi = \phi = 0$) можна сформулювати, як задачу Коші на кривій Γ_τ для функції ρ , тобто

$$\mathbb{A}\rho \equiv \rho_t - \mathbb{D}(\Delta_\Gamma \rho) = \varphi, \quad (x, t) \in \Gamma_\tau, \quad \rho(x, 0) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Завдяки Лемі 2, можна вважати, що $\varphi \in \mathcal{E}_0^{1+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$. Далі, аналогічно роботі [20] (див. також [6]), можна використати метод побудови регуляризатора (§7 розділу 4 монографії [13]) для доведення справедливості наступної леми.

Лема 3. *Нехай $\varphi \in \mathcal{E}_0^{1+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$, тоді для довільного τ , існує єдиний розв'язок $\rho \in \mathcal{P}_{00}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$ задачі $\mathbb{A}\rho = \varphi$.*

Нарешті розглянемо лінійну задачу, відповідну до задачі (13), (14):

$$L_0 \mathcal{U}^\pm = f^\pm, \quad (x, t) \in Q_\tau^\pm, \quad (17)$$

$$\Delta \mathcal{V} = \tilde{f}, \quad (x, t) \in Q_\tau^-, \quad (18)$$

$$\mathcal{U}^- = 0, \quad (x, t) \in S_\tau, \quad [\mathcal{U}] = w, \quad [\sigma_{n_0}(\mathcal{U})] = b, \quad (x, t) \in \Gamma_\tau, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_S} = 0, \quad (y, t) \in S_\tau, \quad \rho(y, 0) = 0, \quad y \in \Gamma, \quad (y, t) \in \Gamma_\tau, \\ \mathcal{V} - G_0(\mathcal{U}^-) - \Delta_\Gamma \rho = g, \quad (y, t) \in \Gamma_\tau, \\ \rho_t - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_0} = h, \quad (y, t) \in \Gamma_\tau, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} f^\pm \in \mathcal{E}^{1+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^\pm), \quad \tilde{f} \in \mathcal{E}^{\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^-), \quad w \in \mathcal{E}^{3+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau), \\ b \in \mathcal{E}^{2+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau), \quad g \in \mathcal{E}^{2+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau), \quad h \in \mathcal{E}^{1+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau). \end{aligned} \quad (21)$$

Якщо $\mathcal{U}^\pm \in \mathcal{E}^{3+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^\pm)$, $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{2+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^-)$, $\rho \in \mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$, позначимо

$$\|(\mathcal{U}^+, \mathcal{U}^-, \mathcal{V}, \rho)\| = |\mathcal{U}^+|_{Q_\tau^+}^{3+\alpha, \alpha/3} + |\mathcal{U}^-|_{Q_\tau^-}^{3+\alpha, \alpha/3} + |\mathcal{V}|_{Q_\tau^-}^{2+\alpha, \alpha/3} + \|\rho\|_{\Gamma_\tau}^{4+\alpha, \alpha/3}.$$

З результатів роботи [18] випливає, що існує єдиний розв'язок задачі (17), (19): $\mathcal{U}^\pm \in \mathcal{E}^{3+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^\pm)$. З Лемі 3 робимо висновок про існування $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{2+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^-)$, $\rho \in \mathcal{P}^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau)$ – єдиного розв'язку задачі (18), (20). Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконано умови (21), тоді існує єдиний розв'язок задачі (17)-(20), причому справедлива оцінка*

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{U}^+, \mathcal{U}^-, \mathcal{V}, \rho)\| \leq C \left(|f^+|_{Q_\tau^+}^{1+\alpha, \alpha/3} + |f^-|_{Q_\tau^-}^{1+\alpha, \alpha/3} + |\tilde{f}|_{Q_\tau^-}^{\alpha, \alpha/3} + \right. \\ \left. + |w|_{\Gamma_\tau}^{3+\alpha, \alpha/3} + |b|_{\Gamma_\tau}^{2+\alpha, \alpha/3} + |g|_{\Gamma_\tau}^{2+\alpha, \alpha/3} + |h|_{\Gamma_\tau}^{1+\alpha, \alpha/3} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

6. Доведення Теорема 1. Для $r > 0$ визначимо множину $K_r = \{\mathcal{U}^\pm \in \mathcal{E}_0^{3+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^\pm), \mathcal{V} \in \mathcal{E}_0^{2+\alpha, \alpha/3}(Q_\tau^-), \rho \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha, \alpha/3}(\Gamma_\tau) : \|(\mathcal{U}^+, \mathcal{U}^-, \mathcal{V}, \rho)\| \leq r\}$. Позначимо $W = (\mathcal{U}^+, \mathcal{U}^-, \mathcal{V}, \rho)$, $\widehat{W} = (\widehat{\mathcal{U}}^+, \widehat{\mathcal{U}}^-, \widehat{\mathcal{V}}, \widehat{\rho})$, $\theta = (0, 0, 0, 0)$. В операторній формі задача (13), (14) набуває вигляду

$$AW = F(W),$$

де A та F представляють відповідно ліві і праві частини даних співвідношень. Далі визначимо оператор Φ , який зіставляє елементу $\widehat{W} \in K_r$ розв'язок W задачі $AW = F(\widehat{W})$ (див. [3], [15]).

Насамперед зазначимо, що існує достатньо мале значення параметра ϵ таке, що при $\sup_{t \in (0, \tau)} |\rho_*|_{\Omega}^{(1)} \leq \epsilon$ величини $\det J$, $(n_0 \cdot J^{-T} n_0)$, $|J^{-T} n_0|$ є строго додатними, причому значення ϵ залежить від кривої Γ , області Ω та операторів продовження $n_0 \rightarrow N$ і $\rho \rightarrow \rho_*$. Оскільки, за конструкцією оператора продовження, маємо

$$\sup_{t \in (0, \tau)} |\rho_*|_{\Omega}^{(1)} \leq C \sup_{t \in (0, \tau)} |\rho|_{\Gamma}^{(1)} \leq C \tau^{\alpha/3} \|\rho\|_{\Gamma_{\tau}}^{(4+\alpha, \alpha/3)},$$

можна обрати $\tau = \tau_1(\epsilon, r)$ настільки малим, що $C \tau^{\alpha/3} r \leq \epsilon$, і, як наслідок, праві частини (14) будуть коректно визначеними при $\tau \leq \tau_1(\epsilon, r)$ і $W \in K_r$.

Лема 4. При $W \in K_r$, $\widehat{W} \in K_r$ справедливі оцінки

$$\begin{aligned} & |\mathcal{J}(\rho) - \mathcal{J}(\widehat{\rho})|_{\Gamma_{\tau}}^{(3+\alpha, \frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{B}_1(\rho) - \mathcal{B}_1(\widehat{\rho})|_{\Gamma_{\tau}}^{(2+\alpha, \frac{\alpha}{3})} + \\ & + |\mathcal{G}_1(\rho) - \mathcal{G}_1(\widehat{\rho})|_{\Gamma_{\tau}}^{(2+\alpha, \frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{H}_1(\rho) - \mathcal{H}_1(\widehat{\rho})|_{\Gamma_{\tau}}^{(1+\alpha, \frac{\alpha}{3})} \leq C(r) \tau^{\frac{3-\alpha}{12}} \|\rho - \widehat{\rho}\|_{\Gamma_{\tau}}^{4+\alpha, \alpha/3}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & |\mathcal{F}^+(W) - \mathcal{F}^+(\widehat{W})|_{Q_{\tau}^+}^{(1+\alpha, \frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{F}^-(W) - \mathcal{F}^-(\widehat{W})|_{Q_{\tau}^-}^{(1+\alpha, \frac{\alpha}{3})} + \\ & + |\widetilde{\mathcal{F}}^-(W) - \widetilde{\mathcal{F}}^-(\widehat{W})|_{Q_{\tau}^-}^{(\alpha, \frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{B}_2(\rho) - \mathcal{B}_2(\widehat{\rho})|_{\Gamma_{\tau}}^{(2+\alpha, \frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{G}_2(\rho) - \mathcal{G}_2(\widehat{\rho})|_{\Gamma_{\tau}}^{(2+\alpha, \frac{\alpha}{3})} + \\ & + |\mathcal{H}_2(\rho) - \mathcal{H}_2(\widehat{\rho})|_{\Gamma_{\tau}}^{(1+\alpha, \frac{\alpha}{3})} \leq C(r) \left(\tau^{\frac{\alpha}{3}} + \tau^{\frac{3-\alpha}{12}} \right) \|W - \widehat{W}\|. \end{aligned} \quad (24)$$

Оцінка (23) є наслідком нерівності

$$|\rho|_{\Gamma_{\tau}}^{3+\alpha, \alpha/3} \leq C \tau^{\frac{3-\alpha}{12}} |\rho|_{\Gamma_{\tau}}^{4+\alpha, \alpha/3},$$

яка, у свою чергу, випливає з інтерполяційної нерівності (8).

При доведенні оцінки (24) ми використовуємо методи роботи [15], розділу 8.5.3 монографії [21] та нерівності вигляду

$$|uv|_{Q_{\tau}}^{(k+\alpha, \frac{\alpha}{3})} \leq C \tau^{\frac{\alpha}{3}} |u|_{Q_{\tau}}^{(k+\alpha, \frac{\alpha}{3})} |v|_{Q_{\tau}}^{(k+\alpha, \frac{\alpha}{3})},$$

де $u, v \in \mathcal{E}^{(k+\alpha, \frac{\alpha}{3})}(Q_{\tau})$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$. З оцінок (23), (24) і оцінки (22) розв'язку лінійної задачі (17)-(20) випливають нерівності

$$\|\Phi(W) - \Phi(\widehat{W})\| \leq C(r) (\tau^{\frac{3-\alpha}{12}} + \tau^{\frac{\alpha}{3}}) \|W - \widehat{W}\| \leq \frac{1}{2} \|W - \widehat{W}\|,$$

якщо $\tau \leq \tau_2(r)$, де $\tau_2(r)$ таке, що $C(r) (\tau_2^{\frac{3-\alpha}{12}} + \tau_2^{\frac{\alpha}{3}}) r \leq \frac{1}{2}$.

З оцінки (22) отримуємо також оцінку $\|\Phi(\theta)\| \leq C_*$. Звідси маємо

$$\|\Phi(W)\| \leq \|\Phi(W) - \Phi(\theta)\| + \|\Phi(\theta)\| \leq \frac{r}{2} + C_*.$$

Далі, спочатку візьмемо r достатньо великим: $r = 2C_*$, а потім, для вже зафіксованого r , покладемо $\tau = \min\{\tau_1(r, \epsilon), \tau_2(r)\}$. Тоді

$$\|\Phi(W) - \Phi(\widehat{W})\| \leq \frac{1}{2} \|W - \widehat{W}\|, \quad \|\Phi(W)\| \leq r$$

для довільних елементів $W, \widehat{W} \in K_r$, і твердження Теорема 1 випливає з теорема Банаха про нерухому точку стискального відображення.

1. Thornton K., Ågren J., Voorhees P.W. Modelling the evolution of phase boundaries in solids at the meso- and nano-scale // Acta Materialia. – 2003. – V. 51. – С. 5675-5710.
2. Akaiwa N., Thornton K., Ågren J., Voorhees P.W. Large-scale simulations of microstructural evolution in elastically stressed solids // Journal of Comp. Physics. – 2001. – V. 173. – С. 61-86.
3. Базалий Б.В. Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы // Укр.мат.журнал. – 1997. – Т. 49. – С. 1299-1315.
4. Гусаков В.Н., Дегтярев С.П. Существование гладкого решения в одной задаче фильтрации // Укр. матем. журнал. – 1989. – 41, No. 9. – С. 1192-1198.
5. Фролова Е.В. Квазистационарное приближение для задачи Стефана // Проблемы мат. анализа. – 2005. – Вып. 31. – С. 167-179.
6. Mucha P. On the weak solutions to the Stefan problem with Gibbs-Thompson correction // Differential and integral equations. – V. 20. – 2007. – P. 769-792.
7. Васильева Н.В. Об одной краевой задаче со старшими производными в граничном условии, возникающей при исследовании задачи Hele-Shaw с нерегулярной границей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – Т. 7. – С. 33-44.
8. Chen X., Hong J., Yi F. Existence, uniqueness and regularity of the Mullins-Sekerka problem // Commun. in Partial Differential Equations. – 1996. – V. 21. – P. 1705-1727.
9. Friedman A., Reitich F. Quasi-static motion of a capillary drop, I: the two-dimensional case // Journal of Differential Equations. – 2002. – V. 178. – P. 212-263.
10. Gunther M., Prokert, G. On Stokes flow with variable and degenerate surface tension coefficient // Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 2005. – V. 12. – P. 21-60.
11. Bum Ja Jin Estimates of the solutions of the elastic system in a moving domain with free upper interface // Nonlinear Analysis. – 2002. – V. 51. – P. 1009-1029.
12. Бокало М.М., Дмитришин Ю.Б. Нелінійна динамічна крайова задач без початкової умови для квазілінійних еліптичних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2007. – Т. 17. – С. 1-19.
13. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
14. Крылов Н.В. Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 176 с.
15. Бижанова Г.И., Солонников В.А. О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12. – С. 98-139.
16. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – Москва: Наука, 1989. – 464 с.
17. Сарсеева А.С. Исследование задачи Стефана с условием Гиббса-Томпсона на свободной границе // Математический журнал. – 2002. – Т. 2. – С.61-69.
18. Шефтель З.Г. Общая теория граничных задач для эллиптических систем с разрывными коэффициентами // Укр. матем. журнал. – 1966. – Т. 18. – С. 132-136.
19. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. – Москва: Мир, 1974. – 159 с.
20. Краснощек Н.В. Об одной начально-краевой задаче для стационарной системы теории упругости с дополнительным динамическим условием на границе // Труды ИПММ. – 2010. – Т. 21. – С. 137-149.
21. Lunardi A. Analytic semigroup and optimal regularity in parabolic problems. – Basel: Birkhäuser Verlag, 1995. – 340 p.

M. V. Krasnoschok

Classical solvability of a diffusion problem in solid with free boundary.

We consider a generalization of one-phase quasi-stationary Stefan problem with regard for the curvature of the free boundary. The existence of a classical solution of initial-boundary problem with free boundary for stationary system of elasticity and Laplace equation is proved. It is used the method of construction of regularizer and the contraction mapping principle.

Keywords: *free boundary, elasticity, Schauder estimates.*

Н. В. Краснощѣк

Классическая разрешимость задачи диффузии в упругом теле со свободной границей.

Исследована задача, которую можно рассматривать как обобщение однофазной квазистационарной задачи Стефана, учитывающей кривизну свободной границы. Доказано существование классического решения начально-краевой задачи со свободной границей для стационарной системы теории упругости и уравнения Лапласа. При этом используются метод построения регуляризатора и теорема о неподвижной точке сжимающего отображения.

Ключевые слова: *свободная граница, упругость, оценки Шаудера.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
krasnoschok@iamm. ac. donetsk. ua*

Получено 09.09.11

УДК 531.38

©2011. А. В. Мазнев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТРЕХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в предположении, что гиростатический момент зависит от времени. Получено новое решение уравнений движения, характеризующееся специальным классом трех нелинейных инвариантных соотношений.

Ключевые слова: инвариантное соотношение, гиростат, гиростатический момент.

1. Введение. Классическая задача о движении тяжелого твердого тела, которую исследовали многие ученые (см. обзоры [1, 2]) получила многочисленные обобщения, среди которых отметим обобщения в предположении постоянства гиростатического момента [3-5], а также обобщения, в которых учитывается переменность гиростатического момента [6-14]. Актуальность изучения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом обусловлена не только практическим использованием результатов в управлении движением технических объектов, но и получением новой информации о свойствах интегральных многообразий уравнений динамики гиростата с переменным гиростатическим моментом.

В данной работе рассмотрена задача о движении неавтономного, намагниченного и наэлектризованного гиростата в магнитном, электрическом и ньютоновском полях под действием потенциальных и гироскопических сил. Ранее в этой задаче исследовались, в основном, равномерные вращения, маятниковые и прецессионные движения [9-12]. В статье поставлена задача изучения условий существования решений, которые характеризуются тремя нелинейными инвариантными соотношениями специального вида [15-17]. Найдено новое решение уравнений класса Кирхгофа-Пуассона [4] в случае переменного гиростатического момента. Проведен сравнительный анализ этого решения с решением в случае постоянного гиростатического момента [16].

2. Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в векторном виде [4, 5]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \lambda \boldsymbol{\alpha} - B\boldsymbol{\nu}) \times a\mathbf{x} + (\mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu} - L\boldsymbol{\alpha}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \quad \dot{\lambda} = L, \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата в предположении покоящихся носимых тел; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор; $\lambda = \lambda(t)$ – величина гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; L – проекция момента действующих на носимое тело

сил на ось вращения; a – гирационный тензор; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс.

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \lambda \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Выберем в качестве подвижной системы координат главную систему координат, т.е. положим $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Следуя работам [15-17] будем предполагать, что в этой системе координат выполняются условия

$$B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3), \quad C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3), \quad \boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{s} = (s_1, 0, 0). \quad (4)$$

Исключая $L = \dot{\lambda}$ в уравнении (1) и учитывая (4), из (1), (2) имеем

$$\dot{x}_1 = (a_3 - a_2)x_2x_3 - \dot{\lambda} + a_2B_3x_2\nu_3 - a_3B_2x_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = (a_1 - a_3)x_3x_1 - a_3x_3\lambda + a_3B_1x_3\nu_1 - a_1B_3x_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1 - s_1\nu_3, \quad (6)$$

$$\dot{x}_3 = (a_2 - a_1)x_1x_2 + a_2x_2\lambda + a_1B_2x_1\nu_2 - a_2B_1x_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + s_1\nu_2, \quad (7)$$

$$\dot{\nu}_1 = a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3,$$

$$\dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1, \quad (8)$$

$$\dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2.$$

Из второго соотношения системы (3) следует

$$(x_1 + \lambda)\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 - \frac{1}{2}(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2) = k. \quad (9)$$

Поскольку система (5)-(8) не замкнута относительно неизвестных величин $x_1, x_2, x_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \lambda$, то её интегрирование возможно только на заданных инвариантных соотношениях (см., например [9-14]).

В данной статье по аналогии с подходом [15-17] зададим три инвариантных соотношения

$$x_1 = g_1(\nu_1), \quad x_2 = \nu_2g_2(\nu_1), \quad x_3 = \nu_3g_3(\nu_1), \quad (10)$$

где функции $g_i(\nu_1)$ ($i = 1, 2, 3$) либо заданы, либо подлежат определению. Тогда на инвариантных соотношениях (10) при заданных функциях $g_i(\nu_1)$ уравнения Пуассона

$$\dot{\nu}_1 = \nu_2\nu_3(a_3g_3(\nu_1) - a_2g_2(\nu_1)),$$

$$\dot{\nu}_2 = \nu_3(a_1g_1(\nu_1) - a_3\nu_1g_3(\nu_1)), \quad (11)$$

$$\dot{\nu}_3 = \nu_2(a_2\nu_1g_2(\nu_1) - a_1g_1(\nu_1)),$$

следующие из уравнений (8) интегрируются в квадратурах [15]

$$\nu_2^2(\nu_1) = 2 \int \frac{a_1g_1(\nu_1) - a_3\nu_1g_3(\nu_1)}{a_3g_3(\nu_1) - a_2g_2(\nu_1)} d\nu_1, \quad \nu_3^2 = 1 - \nu_1^2 - \nu_2^2(\nu_1). \quad (12)$$

Для получения решения уравнений (5)-(7) в окончательном виде необходимо соотношения (10), (12) подставить в эти уравнения. В статьях [15-17] данная проблема исследуется для случая постоянного гиростатического момента. Здесь будем предполагать, что $\lambda(t) \neq const$.

3. Редукция уравнений (5)-(7). Из соотношения (9) определим

$$\lambda = \frac{1}{\nu_1} \left[k + \nu_1 \left(\frac{1}{2} B_1 \nu_1 - g_1(\nu_1) \right) + \nu_2^2 \left(\frac{1}{2} B_2 - g_2(\nu_1) \right) + \nu_3^2 \left(\frac{1}{2} B_3 - g_3(\nu_1) \right) \right]. \quad (13)$$

Подставим выражение (13) в уравнения (6) и (7)

$$\begin{aligned} & \nu_1 g_2(\nu_1)(a_3 \nu_1 g_2(\nu_1) - a_1 g_1(\nu_1)) + \nu_1 \nu_2^2 g_2'(\nu_1)(a_2 g_2(\nu_1) - a_3 g_3(\nu_1)) + \\ & + a_1 \nu_1 g_1(\nu_1)(g_3(\nu_1) - B_3) - a_3 g_3(\nu_1) \left[k - \frac{1}{2} B_1 \nu_1^2 + \nu_2^2 \left(\frac{1}{2} B_2 - g_2(\nu_1) \right) + \right. \\ & \left. + \nu_3^2 \left(\frac{1}{2} B_3 - g_3(\nu_1) \right) \right] - s_1 \nu_1 + (C_1 - C_3) \nu_1^2 = 0, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nu_1 g_3(\nu_1)(a_1 g_1(\nu_1) - a_2 \nu_1 g_2(\nu_1)) + \nu_1 \nu_3^2 g_3'(\nu_1)(a_2 g_2(\nu_1) - a_3 g_3(\nu_1)) + \\ & + a_1 \nu_1 g_1(\nu_1)(B_2 - g_2(\nu_1)) + a_2 g_2(\nu_1) \left[k - \frac{1}{2} B_1 \nu_1^2 + \nu_2^2 \left(\frac{1}{2} B_2 - g_2(\nu_1) \right) + \right. \\ & \left. + \nu_3^2 \left(\frac{1}{2} B_3 - g_3(\nu_1) \right) \right] + s_1 \nu_1 + (C_2 - C_1) \nu_1^2 = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Поскольку соотношение (13) представляет собой первый интеграл уравнений (5)-(8), то в качестве редуцированной системы можно принять систему уравнений (11), (13)-(15). Интегралом этой системы служит кинематическое соотношение $\nu^2 = 1$. В силу равенств (12) из уравнений (14), (15) получим

$$\begin{aligned} & 2 \left[\nu_1 g_2'(\nu_1)(a_2 g_2(\nu_1) - a_3 g_3(\nu_1)) - a_3 g_3(\nu_1) \left(\frac{1}{2} (B_2 - B_3) + g_3(\nu_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - g_2(\nu_1) \right) \right] \int \frac{a_1 g_1(\nu_1) - a_3 \nu_1 g_3(\nu_1)}{a_3 g_3(\nu_1) - a_2 g_2(\nu_1)} d\nu_1 + \nu_1 g_2(\nu_1)(a_3 \nu_1 g_3(\nu_1) - \\ & - a_1 g_1(\nu_1)) + a_1 \nu_1 g_1(\nu_1)(g_3(\nu_1) - B_3) - a_3 g_3(\nu_1) \left[k + \frac{1}{2} B_3 - g_3(\nu_1) - \right. \\ & \left. - \nu_1^2 \left(\frac{1}{2} (B_1 + B_3) - g_3(\nu_1) \right) \right] - s_1 \nu_1 + (C_1 - C_3) \nu_1^2 = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 \left[\nu_1 g_3'(\nu_1)(a_3 g_3(\nu_1) - a_2 g_2(\nu_1)) + a_2 g_2(\nu_1) \left(\frac{1}{2} (B_2 - B_3) + g_3(\nu_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - g_2(\nu_1) \right) \right] \int \frac{a_1 g_1(\nu_1) - a_3 \nu_1 g_3(\nu_1)}{a_3 g_3(\nu_1) - a_2 g_2(\nu_1)} d\nu_1 + \nu_1 g_3(\nu_1)(a_1 g_1(\nu_1) - \\ & - a_2 \nu_1 g_2(\nu_1)) + \nu_1 (1 - \nu_1^2) g_3'(\nu_1)(a_2 g_2(\nu_1) - a_3 g_3(\nu_1)) + \\ & + a_1 \nu_1 g_1(\nu_1)(B_2 - g_2(\nu_1)) + a_2 g_2(\nu_1) \left[k + \frac{1}{2} B_3 - g_3(\nu_1) - \right. \\ & \left. - \nu_1^2 \left(\frac{1}{2} (B_1 + B_3) - g_3(\nu_1) \right) \right] + s_1 \nu_1 + (C_2 - C_1) \nu_1^2 = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Очевидно, имеют место различные варианты исследования уравнений (16), (17). Например, если задать дифференциальную функцию $g_1(\nu_1)$, то уравнения (16), (17) будут являться двумя интегро-дифференциальными уравнениями на функции $g_2(\nu_1)$, $g_3(\nu_1)$. Условия на параметры задачи и функции $g_2(\nu_1)$, $g_3(\nu_1)$, при которых существует решение указанных уравнений, и будут являться условиями существования для уравнений (5)-(8) инвариантных соотношений (10).

4. Новое решение. Приведем пример разрешимости уравнений (14), (15) в классе полиномиальных функций по вспомогательной переменной ν_1 . Следуя работе [16], будем находить условия существования решений следующего вида

$$\begin{aligned} \nu_2^2(\nu_1) &= \alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_1^2, & \nu_3^2(\nu_1) &= (1 - \alpha_0) - \alpha_1\nu_1 - (1 + \alpha_2)\nu_1^2, \\ g_1(\nu_1) &= p_0 + p_1\nu_1 + p_2\nu_1^2, & g_2(\nu_1) &= q_0 + q_1\nu_1, & g_3(\nu_1) &= r_0 + r_1\nu_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим выражения (18) в формулу (13)

$$\lambda(t) = \frac{1}{\nu_1} [\Lambda_0 + \nu_1(\lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_1^2)], \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= k + \frac{1}{2}B_3 + \frac{\alpha_0}{2}(B_2 - B_3) - \alpha_0q_0 - r_0(1 - \alpha_0), \\ \lambda_0 &= \frac{\alpha_1}{2}(B_2 - B_3) - p_0 - \alpha_0q_1 - \alpha_1q_0 - r_1(1 - \alpha_0) + r_0\alpha_1, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2}(B_1 - B_3) + \frac{\alpha_2}{2}(B_2 - B_3) - p_1 - \alpha_2q_0 + \alpha_1(r_1 - q_1) + r_0(1 + \alpha_2), \\ \lambda_2 &= r_1 - p_2 + \alpha_2(r_1 - q_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что запись $\lambda(t)$ в виде (19) обусловлена свойством функции $\lambda(t)$, которое будет получено в дальнейшем.

Внесем функции (18) в уравнения (14), (15) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по переменной ν_1 . Тогда получим $\Lambda_0 = 0$, т.е. в силу (20) имеем условие на постоянную k

$$k = \alpha_0 \left(q_0 + \frac{B_3 - B_2}{2} - r_0 \right) + r_0 - \frac{1}{2}B_3. \quad (21)$$

Следовательно, функция (19) становится квадратичной функцией по ν_1

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_1^2. \quad (22)$$

Получение функции $\lambda(t)$ в виде (22) позволяет использовать исходные уравнения (5)-(7) и систему (11).

Внесем выражения (10), (18), (22) в уравнение (5) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по ν_1 . Тогда имеет место следующая система условий:

$$\begin{aligned} 2a_2\alpha_2q_1^2 + 2a_3(1 + \alpha_2)r_1^2 - q_1r_1(a_2 + a_3)(1 + 2\alpha_2) &= 0, \\ p_1(a_3r_1 - a_2q_1) + 2(p_2 + \lambda_2)(a_3r_0 - a_2q_0) + \lambda_1(a_3r_1 - a_2q_1) + \\ &+ (a_2 - a_3)(q_0r_1 + q_1r_0) - a_2B_3q_1 + a_3B_2r_1 = 0, \\ (p_1 + \lambda_1)(a_3r_0 - a_2q_0) + q_0r_0(a_2 - a_3) - a_2B_3q_0 + a_3B_2r_0 + C_2 - C_3 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставим функции (10), (18) во второе уравнение системы (11) и учтем третье уравнение этой системы. Полученное равенство является тождеством по ν_1 при выполнении равенств

$$\begin{aligned} a_1 p_2 + a_2 \alpha_2 q_1 - a_3(1 + \alpha_2)r_1 &= 0, \\ 2a_1 p_1 - 2a_3(1 + \alpha_2)r_0 + \alpha_1(a_2 q_1 - a_3 r_1) + 2a_2 \alpha_2 q_0 &= 0, \\ 2a_1 p_0 - \alpha_1(a_3 r_0 - a_2 q_0) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Анализ уравнений (23), (24) целесообразно проводить после рассмотрения дополнительных условий, которые находим подстановкой выражений (10), (18), (22) в уравнения (6), (7). Часть этих условий имеет достаточно простой вид

$$r_1(a_2 + a_3) - 2a_2 q_1 = 0, \quad q_1(a_2 + a_3) - 2a_3 r_1 = 0. \quad (25)$$

В силу предположения $q_1 \neq 0$, $r_1 \neq 0$ из (25) следуют равенства

$$a_3 = a_2, \quad r_1 = q_1. \quad (26)$$

Первое равенство из системы (23) на основании условий (26) становится тождеством, а из первого равенства системы (24) следует следующее значение p_2

$$p_2 = \frac{a_2 q_1}{a_1} \quad (27)$$

Равенства (26), (27) позволяют упростить систему уравнений (11)

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a_2(r_0 - q_0)\nu_2\nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_3[a_1 p_0 + (a_1 p_1 - a_2 r_0)\nu_1], \\ \dot{\nu}_3 &= \nu_2[-a_1 p_0 + (a_2 q_0 - a_1 p_1)\nu_1]. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как постановка задачи проводилась с учетом условия $\nu_1 \neq const$, то из первого уравнения системы (28) следует, что $r_0 \neq q_0$.

Из второго и третьего уравнений системы (24) найдем

$$p_0 = \frac{\alpha_1 a_2 (r_0 - q_0)}{2a_1}, \quad p_1 = \frac{a_2}{a_1} [(1 + \alpha_2)r_0 - \alpha_2 q_0]. \quad (29)$$

Второе равенство из системы (23) позволяет определить разность

$$r_0 - q_0 = \frac{B_3 - B_2}{2}. \quad (30)$$

Если вновь обратимся к системе условий, которая вытекает из уравнения (6) в силу (10), (18), (26), то установим равенство

$$4(1 + \alpha_2)(q_0 - r_0) = (2 + \alpha_2)B_2 - (1 + \alpha_2)B_3 - B_1. \quad (31)$$

Условие совместимости уравнений (30), (31) приводит к выражению для α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{B_3 - B_1}{B_2 - B_3}. \quad (32)$$

Равенства (26), (27), (29), (30), (32) позволяют существенно упростить дальнейшие выкладки получения решения (10), (18), (22). Используя указанный выше полуобратный метод исследования условий существования этого решения, а также формулы (20)-(22), (26)-(30), (32), получим

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_1^2, \quad (33)$$

$$x_1 = p_0 + p_1\nu_1 + p_2\nu_1^2, \quad x_2 = \nu_2(q_0 + q_1\nu_1), \quad x_3 = \nu_3(r_0 + q_1\nu_1), \quad (34)$$

$$\nu_2^2 = \alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_1^2, \quad \nu_3^2 = (1 - \alpha_0) - \alpha_1\nu_1 - (1 + \alpha_2)\nu_1^2, \quad (35)$$

$$\nu_1 = \frac{a_2\kappa_0}{2} \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_1^2)[(1 - \alpha_0) - \alpha_1\nu_1 - (1 + \alpha_2)\nu_1^2]}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= B_3 - B_2, \quad \sigma_0 = B_2 - B_1, \quad \delta_0 = B_3 - B_1, \quad \lambda_0 = -\frac{a_2\alpha_1\kappa_0}{4a_1} - q_1, \\ \lambda_1 &= -\frac{(a_1 - a_2)}{a_1\kappa_0}[r_0\sigma_0 - q_0\sigma_0], \quad \lambda_2 = \frac{(a_1 - a_2)}{a_1}q_1, \quad p_0 = \frac{a_2\alpha_1\kappa_0}{4a_1}, \\ p_1 &= \frac{a_2}{a_1}[(1 + \alpha_2)r_0 - \alpha_2q_0], \quad p_2 = \frac{a_2q_1}{a_1}, \\ q_0 &= \frac{1}{2a_2\kappa_0}[a_2(B_1 + B_2)\kappa_0 + 4(C_2 - C_3)], \quad r_0 = q_0 + \frac{\kappa_0}{2}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{8a_2q_1^2\kappa_0^2} \{4q_1^2[\kappa_0(2a_2(B_1 + B_3) - a_1(B_2 + B_3)) + 8(C_3 - C_1)] - \\ &\quad - 16s_1\kappa_0q_1 - (B_2 + B_3)[a_2\kappa_0\sigma_0\delta_0 + 4C_1\kappa_0 - 4C_2\delta_0 + 4C_3\sigma_0]\}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2a_2q_1\kappa_0^2} [4a_1\kappa_0q_1^2 + a_2\kappa_0\sigma_0\delta_0 + 4C_1\kappa_0 - 4C_2\delta_0 + 4C_3\sigma_0], \quad \alpha_2 = -\frac{\delta_0}{\kappa_0}. \end{aligned}$$

5. Анализ решения (33)-(36). Проведем анализ свойств решения (33)-(36), существующего при условиях (37). Одним из основных свойств является то обстоятельство, что параметр q_1 принимает произвольные значения. Из вида функций $\nu_2^2(\nu_1)$ и $\nu_3^2(\nu_1)$ из равенств (35) следует, что действительности решения (33)-(36) можно добиться, выбирая малые положительные значения параметра α_0 , так как при этом выполняются неравенства $\nu_2^2(0) > 0$, $\nu_3^2(0) > 0$. Из вида дифференциального уравнения (36) следует, что обращение интеграла

$$\int_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_1}{\sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_1^2)[(1 - \alpha_0) - \alpha_1\nu_1 - (1 + \alpha_2)\nu_1^2]}} = \frac{a_2\kappa_0}{2}(t - t_0) \quad (38)$$

приводит к эллиптической функции $\nu_1(t)$. Следовательно, и решение (33)-(35) характеризуется тем, что оно выражается эллиптическими функциями времени.

Поскольку в данном решении гирационный тензор имеет вид $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_2)$, а вектор $\mathbf{s} = (s_1, 0, 0)$, то обобщенный центр масс гиростата лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида. Это свойство отличает решение (33)-(36) от решения [16], в котором $a_1 = a_2 = a_3 = a^*$ (гирационный эллипсоид – сфера). Анализ соотношений (37) показывает, что в полученном решении нет условий на параметры a_i, B_i, C_i . Решение [16] существует при выполнении условия

$$a^*(B_1 - B_2)(B_2 - B_3)(B_3 - B_1) - 4C_1(B_2 - B_3) - 4C_2(B_3 - B_1) - 4C_3(B_1 - B_2) = 0, \quad (39)$$

т.е. в нем имеются ограничения на параметры a_i, B_i, C_i уравнений Кирхгофа и условия на параметр s_1 .

Общими чертами в условиях существования решения (33)-(37) и решения [16] служит значение параметра α_2 . Если в системе (37) положить $a_1 = a_2$, то функция $\lambda(t) = \lambda_0 = \text{const}$. Поэтому найденное решение теряет смысл для сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Если решение (33)-(37) рассматривать для классической задачи о движении гиростата под действием силы тяжести, т.е. считать $B_i = 0, C_i = 0$ ($i = \overline{1,3}$), то, например, последние три равенства из (37) невозможны. Поэтому полученное решение не имеет места для этой задачи.

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001. – 384 с.
2. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. – Київ: Наук. Думка. – 1978. – 296 с.
3. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. университета. – 1965. – 221 с.
4. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, № 5. – P. 742-745.
5. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел. // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
6. Liouville J. Developpements sur un chapitre de la Мисаника de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1-25.
7. Volterra V. Sur la thйorie des variations des latitudes. // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201-358.
8. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М.–Л.: ОГИЗ. – 1949. – **2**. – С. 152-309.
9. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.
10. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
11. Волкова О.С. Регулярные прецессии гиростата с неподвижной точкой в поле силы тяжести // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 63-76.
12. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-102.
13. Мазнев А.В. О прецессии сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести // Вісник Донецького нац. ун-ту, Сер. А: Природничі науки, 2011. – №1. – С. 14-18.
14. Горр Г.В., Мазнев А.В. О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики //

- Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2010. – Т. 21. – С. 64-75.
15. Горр Г.В., Узбек Е.К. К постановке задачи о решении уравнений Д. Гриоли–М.П. Харламова в специальной форме // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 133-139.
 16. Горр Г.В., Миронова Е.М. Новые решения в задаче о движении тела в поле потенциальных и гироскопических сил // Доповіді НАН України. – 2001. – № 4. – С. 41-48.
 17. Узбек Е.К. О новом решении уравнений Г. Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Прикл. математика и механика. – 2004. – 68. – Вып. 6. – С. 964-970.

A. M. Maznev

About one class of three nonlinear invariant correlations of gyrostat motion equations with a variable gyrostatic moment.

The problem of gyrostat motion under the action of potential and gyroscopic forces in the assumption that gyrostatic moment depends on time is considered. The new decision of motion equations which is characterized by special class of three nonlinear invariant correlations is got.

Keywords: *invariant correlation, gyrostat, gyrostatic moment.*

О. В. Мазнев

Про один клас трьох нелінійних інваріантних співвідношень рівнянь руху гіростата із змінним гіростатичним моментом.

Розглянуто задачу про рух гіростата під дією потенційних і гіроскопічних сил в припущенні, що гіростатичний момент залежить від часу. Отримано новий розв'язок рівнянь руху, який характеризується спеціальним класом трьох нелінійних інваріантних співвідношень.

Ключові слова: *інваріантне співвідношення, гіростат, гіростатичний момент.*

Донецкий национальный ун-т
maznev_av@rambler.ru

Получено 04.10.11

УДК 517.988.28

©2011. П. А. Машаров

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАДИУСЕ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ШАРОВЫХ СЕГМЕНТОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПОЛУШАР

Найдено значение наименьшего радиуса шара, в котором данное множество является множеством Помпейю. В качестве множества рассматривается каждый шаровой сегмент с высотой, большей радиуса. Полученное значение существенно уточняет известные ранее оценки.

Ключевые слова: экстремальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю, множество Помпейю, шаровой сегмент.

Введение и формулировка основного результата. Всюду в работе через \mathbb{R}^n обозначается вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 3$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Группу движений \mathbb{R}^n будем обозначать через $\mathbf{M}(n)$. $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) : \lambda A \subset B\}$ – часть группы движений, оставляющая A внутри B . $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ – шар радиуса R . Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $L_{loc}(B)$ будем понимать класс локально интегрируемых на B функций.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в B , если из того, что комплекснозначная $f \in L_{loc}(B)$, для которой $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$ для всех $\lambda \in \text{Mot}(A, B)$, следует, что f равна нулю почти всюду в B . Совокупность всех множеств Помпейю в B будем обозначать через $\text{Pomp}(B)$.

Классическая проблема Помпейю об описании класса $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ изучалась во многих работах, см. обзоры [1], [2] с обширной библиографией. Из результата Вильямса ([3]) следует, что если граница множества A липшицева, гомеоморфна сфере, но не вещественно аналитическая, то $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$.

Если же некоторое множество $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, то возникает вопрос, будет ли $A \in \text{Pomp}(\mathbb{B}_R)$ при достаточно большом R ? В [4] В.В. Волчков получил утвердительный ответ на этот вопрос. В связи с этим в [5] поставлена

Проблема. Для данного A найти $\mathcal{P}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \text{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathcal{P}(A)$ естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A .

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{P}(A)$, получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем, см. [6]. В [4-5], [7-9] содержится достаточно полная история данного вопроса и близких к нему.

В работе для каждого шарового сегмента $\mathbb{S}_h = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1, x_n \geq 1 - h\}$, содержащего полушар, найден экстремальный радиус Помпейю, то есть получена

Теорема 1. Для каждого $h \in (1; 2)$ значение

$$\mathcal{P}(\mathbb{S}_h) = \mathcal{R}(h) \stackrel{\text{опр.}}{=} \begin{cases} \sqrt{8h - 3h^2}/2, & 1 < h \leq 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2. \end{cases}$$

1. Описание группы $SO(n)$. Вращениями евклидова пространства \mathbb{R}^n называют линейные преобразования g этого пространства, не меняющие его ориентации и оставляющие инвариантным расстояние точек от начала координат: $|gx| = |x|$. Вращения n -мерного пространства \mathbb{R}^n образуют группу, которая обозначается через $SO(n)$. Инвариантная нормированная мера на группе $SO(n)$ имеет вид

$$d\tau = A_n \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^k \sin^{j-1} \theta_j^k d\theta_j^k, \quad \text{где} \quad A_n = \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(k/2)}{2\pi^{k/2}}, \quad (1)$$

а θ_j^k , $1 \leq k \leq n-1$, $1 \leq j \leq k$ – углы Эйлера вращения g (см. [10, с. 434]).

Пусть далее $T(g)$ – квазирегулярное представление группы $SO(n)$, то есть $(T(g)f)(\sigma) = f(g^{-1}\sigma)$ для любых $f \in L^2(\mathbb{S})$, $\sigma \in \mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\}$, $g \in SO(n)$ (см. [10, с. 442]). Обозначим $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления на пространство \mathcal{H}_k однородных гармонических полиномов степени k , рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S})$ (см. [10, с. 446]).

Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$, $1 \leq l \leq d_k$ – фиксированный ортонормированный базис в пространстве \mathcal{H}_k , $\{t_{lp}^k\}$ – матрица представления $T^k(\tau)$, то есть

$$\left(T^k(\tau)Y_l^{(k)}\right)(\sigma) = Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{d_k} t_{lp}^k(\tau)Y_p^{(k)}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{S}. \quad (2)$$

При $k = 0$ имеем $d_k = 1$, $Y_1^{(k)}(\sigma) = 1$, $t_{11}^k(\tau) = 1$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}$, $\tau \in SO(n)$. При $n = 2$ и $k \geq 1$ всюду в дальнейшем будем использовать следующий базис в \mathcal{H}_k : $Y_1^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$, $Y_2^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k$. Если τ – вращение на угол θ в \mathbb{R}^2 , то для этого базиса $t_{11}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t_{22}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t_{12}^k(\tau) = t_{21}^k(\tau) = 0$.

Всякой функции $f \in L_{loc}(\mathbb{B}_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, R), \quad (3)$$

где

$$f_{kl}(\rho) = \int_{\mathbb{S}} f(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\omega(\sigma) \quad (4)$$

(здесь и далее $d\omega$ – нормированная поверхностная мера на \mathbb{S}).

При $n = 2$ из последнего равенства имеем

$$f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) = \int_{SO(2)} f(\tau^{-1}x)\overline{t_{ll}^k(\tau)}d\tau. \quad (5)$$

В [11, с. 30] получена аналогичная формула для $n \geq 3$:

Лемма (1.1.1 из [11]). Пусть $n \geq 3$, $f \in L_{loc}(\mathbb{B}_R)$. Тогда

$$f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) = d_k \int_{SO(n)} f(\tau^{-1}x)\overline{t_{lp}^k(\tau)}d\tau. \quad (6)$$

Отметим также следующие интегральные формулы (см. [5, Глава 1, § 2.1]). Пусть $0 \leq r < R \leq \infty$. Тогда для любой $f \in L(\mathbb{B}_{r,R})$ (здесь и далее используем обозначение для шарового слоя $\mathbb{B}_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\}$) выполняется следующее равенство

$$\int_{\mathbb{B}_{r,R}} f(x) dx = \int_r^R \rho^{n-1} d\rho \int_{\mathbb{S}} f(\rho\sigma) d\omega(\sigma). \quad (7)$$

Кроме этого, для любой функции $f \in L(\mathbb{S})$ верно

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}} f(\sigma) d\omega(\sigma) = \int_{\text{SO}(n)} f(\tau\mathbf{e}_1) d\tau, \quad (8)$$

где $\omega_{n-1} = \begin{cases} \frac{n\pi^{n/2}}{(n/2)!} & \text{если } n \text{ четное,} \\ \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} ((n-1)/2)!}{(n-1)!} & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases}$ – площадь единичной сферы \mathbb{S} в \mathbb{R}^n , $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

2. Геометрические конструкции. Для множества A из \mathbb{R}^n рассмотрим величину $r^*(A) = \inf\{R > 0 : \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R) \neq \emptyset\}$. Отметим, что

$$r^*(\mathbb{S}_h) = \begin{cases} \sqrt{1-h^2}, & h \in (0, 1); \\ 1, & h \geq 1. \end{cases}$$

Из определений $r^*(A)$ и $\text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ следует, что для произвольного компакта A множество $\text{Mot}(A, \mathbb{B}_R) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $R > r^*(A)$.

Рассмотрим граничные положения \mathbb{S}_h в \mathbb{B}_R и определим диапазон расстояний от центра шара \mathbb{B}_R до точек единичной сферы и нижнего основания сегмента \mathbb{S}_h , а также соотношения между ними для различных $h > 1$.

Расстояние от центра шара, частью которого является рассматриваемый сегмент, до основания \mathbb{S}_h равно $h-1$, поэтому радиус основания равен $\sqrt{1-(h-1)^2} = \sqrt{2h-h^2}$. Минимальное расстояние от центра шара \mathbb{B}_R до этого основания равно $\max\{0; R-h\}$. А максимальное такое расстояние равно $\sqrt{R^2-(2h-h^2)} = \sqrt{R^2+h^2-2h}$.

Максимальное расстояние до точек сферической границы сегмента равно радиусу шара R , а минимальное такое, при котором сфера помещается в шар – $\max\{0, h - \sqrt{R^2+h^2-2h}\}$.

В дальнейшем необходимо будет воспользоваться решением неравенства, левой и правой частями которого будут некоторые только что найденные выражения. Итак, рассмотрев уравнение $\sqrt{R^2+h^2-2h} = h - \sqrt{R^2+h^2-2h}$, получаем решение $R_0 = \sqrt{8h-3h^2}/2$. Таким образом, если $R > R_0$, то $h - \sqrt{R^2+h^2-2h} < \sqrt{R^2+h^2-2h}$. Рассмотрев уравнение $R_0 = h$, имеем $h_0 = 8/7$.

3. Некоторые классы функций и их свойства. В работе будут использоваться следующие стандартные обозначения. Для $m \in \mathbb{N}$ под $C^m(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка до m включительно кото-

рых (включая смешанные) непрерывны, $C(B)$ – класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \bigcap_{m=1}^{\infty} C^m(B)$.

Пусть множество $B \subset \mathbb{R}^n$ – открытое. Рассмотрим класс функций $\mathfrak{F}(A, B)$, состоящий из таких функций $f \in L_{loc}(B)$, для которых равенство

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (9)$$

верно для всех $\lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{F}^m(A, B) = \mathfrak{F}(A, B) \cap C^m(B)$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}^\infty(A, B) = \mathfrak{F}(A, B) \cap C^\infty(B)$ и $\mathfrak{F}^0(A, B) = \mathfrak{F}(A, B) \cap C(B)$.

Сначала отметим одно простое свойство указанных классов функций. Для любых двух функций $f, g \in \mathfrak{F}^m(A, B)$, где $m = \{0, 1, \dots, \infty\}$ или $f, g \in \mathfrak{F}(A, B)$ и для произвольных двух чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ функция $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{F}^m(A, B)$, или, соответственно, принадлежит $\mathfrak{F}(A, B)$. Это утверждение следует из линейности пространств гладких и интегрируемых функций $C^m(B)$, $L_{loc}(B)$ и из линейности интеграла.

Непосредственно из определения классов $\mathfrak{F}(A, \mathbb{B}_R)$ и $\mathfrak{F}^m(A, \mathbb{B}_R)$ следует

Лемма 1. Если $f(x)$ принадлежит одному из $\mathfrak{F}(A, \mathbb{B}_R)$ или $\mathfrak{F}^m(A, \mathbb{B}_R)$, то для любого движения $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ такого, что $|\lambda \vec{0}| < \delta$ ($\vec{0} = (0, \dots, 0)$ – начало отсчета), функция $f(\lambda x)$ принадлежит, соответственно, $\mathfrak{F}(A, \mathbb{B}_{R-\delta})$ или $\mathfrak{F}^m(A, \mathbb{B}_{R-\delta})$.

Кроме того, классы $\mathfrak{F}(A, B)$ и $\mathfrak{F}^m(A, B)$ можно рассматривать как множества решений уравнений свертки $f * \chi_A = 0$ из классов $L_{loc}(B)$ и $C^m(B)$, соответственно.

Лемма 2. Пусть $f \in \mathfrak{F}^m(A, B)$, $m \geq 1$. Тогда все частные производные функции f принадлежат $\mathfrak{F}^{m-1}(A, B)$.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in \text{Mot}(A, B)$ и рассмотрим функцию $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \chi_{x-\lambda A}(x-y) dy = \int_{\lambda A} f(y) dy \equiv 0$, так как $f \in \mathfrak{F}^m(A, B)$. С другой стороны, сделав в интеграле замену $t = x - y$, получаем $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+t) \chi_{x-\lambda A}(t) dt$. Дифференцируя последнее равенство по j -той переменной x_j , получаем $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x+t)}{\partial x_j} \chi_{x-\lambda A}(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(y)}{\partial x_j} \chi_{x-\lambda A}(x-y) dy = \int_{\lambda A} \frac{\partial f(y)}{\partial x_j} dy \equiv 0$. Последнее равенство как раз и означает $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathfrak{F}^{m-1}(A, B)$, $j \in \overline{1, n}$. \square

Лемма 3. Пусть $R > r^*(S_h)$, функция $f \in \mathfrak{F}(S_h, \mathbb{B}_R)$ ($f \in \mathfrak{F}^m(S_h, \mathbb{B}_R)$). Тогда каждое слагаемое ряда (3), доопределенное в точке $x = 0$ по непрерывности, принадлежит тому же классу. То есть при всех $k \geq 0$; $1 \leq l, p \leq d_k$ функции $f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathfrak{F}(S_h, \mathbb{B}_R)$ (соответственно $f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathfrak{F}^m(S_h, \mathbb{B}_R)$).

Доказательство. Путем непосредственных вычислений, используя (6) и инвариантность $\mathfrak{F}(S_h, \mathbb{B}_R)$ относительно вращений, получаем, что для любого $\lambda \in \text{Mot}(S_h, \mathbb{B}_R)$ верно $\int_{\lambda S_h} f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) dx = \int_{\lambda S_h} \left[d_k \int_{\text{SO}(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{lp}^k(\tau)} d\tau \right] dx = d_k \int_{\text{SO}(n)} \left[\int_{\lambda S_h} f(\tau^{-1}x) dx \right] \overline{t_{lp}^k(\tau)} d\tau = 0$, что в данном случае означает принадлежность классу $\mathfrak{F}(S_h, \mathbb{B}_R)$. Для доказательства принадлежности $\mathfrak{F}^m(S_h, \mathbb{B}_R)$ заметим,

что произведение непрерывно дифференцируемых функций является непрерывно дифференцируемой функцией. \square

4. Вспомогательные утверждения. Для получения основного результата работы необходимо будет воспользоваться общим решением некоторого функционального уравнения, впервые рассмотренного в работе [12].

Теорема (3.4.4 в [11]). Пусть $0 < \delta < 1$, $f \in C(\mathbb{B}_{1-\delta, 1+\delta})$ и при всех $u, v \in \mathbb{S}$, $w \in \mathbb{B}_\delta$ имеет место равенство

$$f(w + u) + f(w - u) = f(w + v) + f(w - v). \quad (10)$$

Тогда

$$f(x) = C_1|x|^2 + C_2xy + C_3, \quad (11)$$

где $y \in \mathbb{S}$. Обратное, всякая функция вида (11) удовлетворяет равенству (10).

Лемма 4. Пусть $R > r^*(\mathbb{S}_h)$, функция $f \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$. Тогда f удовлетворяет (10) при всех $u, v \in \mathbb{S}$ и $w \in \mathbb{B}_{R-1}$.

Доказательство. Достаточно получить (10) при $w = 0$, так как общий случай получается из этого сдвигом.

Пусть $\mathbb{S}'_h = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, x_n \geq 1 - h\}$ – боковая поверхность шарового сегмента \mathbb{S}_h , $\mathbb{S}''_h = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1, x_n = 1 - h\}$ – основание \mathbb{S}_h . Таким образом, граница $\partial\mathbb{S}_h = \mathbb{S}'_h \cup \mathbb{S}''_h$.

Для интегрируемой вектор-функции $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ поверхностный интеграл второго рода связан с поверхностным интегралом первого рода формулой (см., например, [13, §15.8]) $\int_{\partial\mathbb{S}_h} (f_1(x) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + f_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}) = \int_{\partial\mathbb{S}_h} (f_1(x)\sigma_1 + \dots + f_n(x)\sigma_n) d\omega(\sigma)$.

С другой стороны, по формуле Гаусса-Остроградского, имеем

$$\int_{\partial\mathbb{S}_h} (f_1(x) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + f_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}) = \int_{\mathbb{S}_h} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) dx. \quad (12)$$

Таким образом, для любого $j \neq n$ и $f \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ имеем

$$\int_{\mathbb{S}'_h} f(g^{-1}\sigma)\sigma_j d\omega(\sigma) + \int_{\mathbb{S}''_h} f(g^{-1}\sigma)\sigma_j d\omega(\sigma) = \int_{\mathbb{S}_h} \frac{\partial}{\partial x_j} f(g^{-1}x) dx = 0$$

для всех $g \in \text{SO}(n)$. Но так как на \mathbb{S}''_h все $\sigma_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, то

$$\int_{\mathbb{S}'_h} f(g^{-1}\sigma)\sigma_j d\omega(\sigma) = 0. \quad (13)$$

Умножая обе части равенства (13) на $\overline{t_{ip}^k(g)}$ и интегрируя на $\text{SO}(n)$, из (5) и (6) получаем $f_{kl}(1) \int_{\mathbb{S}'_h} \sigma_j Y(\sigma) d\omega(\sigma) = 0$ при $Y = Y_p^{(k)}$, $1 \leq p \leq d_k$, а значит и при всех $Y \in \mathcal{H}_k$. Если k четно, последний интеграл не равен нулю при $Y(\sigma) = (\sigma_{n-1} + i\sigma_n)^k$, откуда $f_{kl}(1) = 0$. Тогда все слагаемые ряда (3) для функции $f(x) + f(-x)$ при $k \geq 1$ равны нулю, откуда следует утверждение леммы 4. \square

Лемма 5. Пусть $R > 1$ и $f \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$: $f = C$ при $|x| > 2 - R$. Тогда

$$\int_{\tilde{B}} (f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - C) dx_1 \dots dx_{n-1} = 0, \quad (14)$$

где $\tilde{B} = \bar{\mathbb{B}} \cap \{x_n = 1 - h\} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1}: x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 2h - h^2, x_n = 1 - h\}$ – основание рассматриваемого шарового сегмента \mathbb{S}_h .

Доказательство. Для таких $\delta > 0$, что $\cos \delta > h - 1$ рассмотрим множества

$$\begin{aligned} S^1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1, -x_1 \operatorname{tg} \delta - \frac{h-1}{\cos \delta} \leq x_n \leq x_1 \operatorname{tg} \delta - \frac{h-1}{\cos \delta} \right\}, \\ S^2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1, x_1 \operatorname{tg} \delta - \frac{h-1}{\cos \delta} \leq x_n \leq -x_1 \operatorname{tg} \delta - \frac{h-1}{\cos \delta} \right\}, \\ S^3 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1, -x_1 \operatorname{tg} \delta - \frac{h-1}{\cos \delta} \leq x_n, x_1 \operatorname{tg} \delta - \frac{h-1}{\cos \delta} \leq x_n \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что существует вращение $g_\delta \in \operatorname{SO}(n)$ такое, что $g_\delta \mathbb{S}_h = S^1 \cup S^3$, и $g_{-\delta} \mathbb{S}_h = g_\delta^{-1} \mathbb{S}_h = S^2 \cup S^3$. Так как $f \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$, то $\int_{g_\delta \mathbb{S}_h} f(x) dx = 0$ и $\int_{g_{-\delta}^{-1} \mathbb{S}_h} f(x) dx = 0$. Вычитая последние два равенства, получаем

$$\int_{S^1} f(x) dx = \int_{S^2} f(x) dx. \quad (16)$$

А так как вместе с f классу $\mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ принадлежит и любая производная от f , то, подставляя в (16) вместо f функцию $\frac{\partial(f-C)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ и переходя к пределу в этом равенстве при $\delta \rightarrow +0$, по теореме о среднем, получаем

$$\int_{\tilde{B}} x_1 \frac{\partial(f-C)}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1} = 0. \quad (17)$$

Используя формулу интегрирования по частям и условие, что $f = C$ в $|x| > 2 - R$, получаем (14). \square

Зададим гиперплоскости в \mathbb{R}^n через единичный вектор нормали и расстояние до начала координат: $\xi_{\sigma,d} = \{x \in \mathbb{R}^n: (\sigma, x) = d\}$, где $d \in \mathbb{R}_+$ и $\sigma \in \mathbb{S}$. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Радона $\mathbf{R}f$ может быть рассмотрено как функция на $\mathbb{S} \times \mathbb{R}_+$ и определено по формуле

$$\mathbf{R}f(\sigma, d) = \int_{\xi_{\sigma,d}} f(x) dm_{n-1}(x), \quad (18)$$

где dm_{n-1} – $(n-1)$ -мерная мера. По теореме Фубини видно, что преобразование \mathbf{R} определено для всех $\sigma \in \mathbb{S}$ и почти всех $d \in \mathbb{R}_+$.

Лемма (Следствие 1.8.2 в [5]). Пусть $g \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – четная с компактным носителем. Тогда существует радиальная функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем, для которой $\mathbf{R}f(\sigma, d) = g(d)$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}$, $d \in \mathbb{R}$.

Лемма (Следствие 1.8.4 в [5]). Пусть $r \geq 0$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\mathbf{R}f(\sigma, d) = 0$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}$ и почти всех $d \in (r, +\infty)$. Если существует множество $\Omega \subset (r, +\infty)$ положительной меры такое, что $f(x) = 0$ в $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \in \Omega\}$, тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_{r, +\infty}$.

5. Доказательство основного результата. Перед тем, как перейти к доказательству основного результата работы, рассмотрим следующие функции (см. [5, Глава 1, § 3.3]) $v(x) = \begin{cases} Ce^{1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$ где $C = \left(\int_{\mathbb{B}} e^{1/(|x|^2-1)} dx\right)^{-1}$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}v(x/\varepsilon). \quad (19)$$

Отметим, что радиальная функция $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ обладает свойствами: $\varphi_\varepsilon \geq 0$, $\sup \varphi_\varepsilon = \overline{\mathbb{B}_\varepsilon}$, и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$.

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала, что если $R > \mathcal{R}(h)$, то $\mathbb{S}_h \in \text{Prp}(\mathbb{B}_R)$. Для этого достаточно показать, что $\mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R) = \{0\}$, то есть из того, что $f \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ следует, что $f = 0$.

Итак, считаем $h \in (1, 2)$ фиксированным и $R > \mathcal{R}(h)$. Рассмотрим произвольную $f \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ и $\varepsilon \in (0, R - \mathcal{R}(h))$. Тогда для φ_ε , заданной формулой (19), функция $\psi = f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$. Определенная таким образом ψ удовлетворяет лемме 4, и по теореме 3.4.4 из [11] функция ψ является многочленом в $\mathbb{B}_{h-\sqrt{(R-\varepsilon)^2+h^2-2h}, R-\varepsilon}$. Подберем такой дифференциальный оператор D с постоянными коэффициентами, чтобы $\psi_D = D\psi = C$ в $\mathbb{B}_{h-\sqrt{(R-\varepsilon)^2+h^2-2h}, R-\varepsilon}$. Кроме этого, $\psi_D \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{B}_{R-\varepsilon})$, то есть эта функция удовлетворяет условиям леммы 5. Доопределим ее нулем вне $\overline{\mathbb{B}_{R-\varepsilon}}$. Тогда, учитывая лемму 1, получаем, что интегралы от функции $h = \psi_D - C$ по всем гиперплоскостям равны нулю. Тогда по следствию 1.8.4 из [5] $h = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$, то есть $\psi_D = C$. Но так как $\psi_D \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{B}_{R-\varepsilon})$, то $C = 0$. Подобным образом получим, что все коэффициенты многочлена ψ равны нулю, то есть $\psi = 0$. Используя стандартный метод сглаживания (см, например, §1.3.3 в [5]), получаем $f = 0$ в \mathbb{B}_R .

Пусть теперь $R \in (r^*(\mathbb{S}_h), h)$. Тогда существует $\varepsilon = h - R$ такое, что для любого $\lambda \in \text{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ выполняется $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \lambda\mathbb{S}_h$. Рассмотрим теперь функции

$$v_2(x) = \begin{cases} Ce^{1/(|x|^4-1)}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \text{где } C^{-1} = \int_{\mathbb{B}} e^{1/(|x|^4-1)} dx \quad (20)$$

и

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}v_2(x/\varepsilon). \quad (21)$$

Если φ_ε – функция определенная формулой (19), тогда $f = (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)) \cdot \chi_{\mathbb{B}_\varepsilon}$ – не равная нулю функция, принадлежащая $\mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$.

При $R \leq r^*(\mathbb{S}_h)$ множество $\text{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R) = \emptyset$, поэтому, очевидно, любая функция $f \in C^\infty(\mathbb{B}_R)$ принадлежит $\mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$.

Осталось доказать, что для каждого $h \in (1; 8/7)$ при $R \in [h; \sqrt{8h - 3h^2}/2)$ класс $\mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ состоит не только из нулевой функции. Рассмотрим линейно независимые

радиальные ненулевые функции $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, которые обращаются в нуль при $|x| \leq \sqrt{R^2 + h^2 - 2h}$ и при $|x| \geq h - \sqrt{R^2 + h^2 - 2h}$. Тогда существуют радиальные функции f_1, f_2 такие, что их преобразования Радона $\mathbf{R}f_j(\sigma, |x|) = g_j(x)$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ (см. следствие 1.8.2 из [5]). По следствию 1.8.4 из [5], $f_1 = f_2 = 0$ для $|x| \geq h - \sqrt{R^2 + h^2 - 2h}$. Так как для рассматриваемых R выполняется $h - \sqrt{R^2 + h^2 - 2h} > \sqrt{R^2 + h^2 - 2h}$, то для любого $\lambda \in \text{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ сегмент $\lambda\mathbb{S}_h$ содержит сегмент $\tilde{\mathbb{S}}$ шара $\mathbb{B}_{h - \sqrt{R^2 + h^2 - 2h}}$ высоты $h - 2\sqrt{R^2 + h^2 - 2h}$ с основанием, параллельным основанию \mathbb{S}_h . Рассмотрим не равную нулю функцию $f = \alpha f_1 + \beta f_2$, подобрав значения α и β таким образом, чтобы $\int_{\tilde{\mathbb{S}}} f(x) dx = 0$. Эта ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$, так как $\int_{\lambda\mathbb{S}_h} f(x) dx = \int_{\tilde{\mathbb{S}}} f(x) dx = 0$. \square

Отметим, что значение $\mathcal{P}(\mathbb{S}_1)$ найдено в [5], основной результат работы в случае $n = 2$ был ранее получен в [14], а в случае $n \geq 2$ для всех $h \in (\sqrt{5} - 1, 2)$ – в [15]. Кроме того, из известных ранее результатов С.Беренштейна и Р.Гэя (см., например, [6]) для $h > 1$ следовала лишь оценка $\mathcal{P}(\mathbb{S}_h) < 2$.

6. Некоторые применения. Теорема 1 позволяет получить достаточное условие замкнутости в пространстве $L^p(\mathbb{B}_R)$ ($1 \leq p < \infty$) системы функций

$$\{\chi_{\mathbb{S}_h}(\lambda^{-1}x) : \lambda \in \text{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)\}. \quad (22)$$

Теорема 2. Пусть $h \in (1; 2)$, $R > \mathcal{R}(h)$. Тогда система функций (22) замкнута в пространстве $L^p(\mathbb{B}_R)$ при любом $1 \leq p < \infty$.

Отметим, что утверждение теоремы 2 теряет силу при $p = \infty$, так как ненулевые тождественные константы не могут быть аппроксимированы указанным в теореме 2 способом.

Рассмотрим также применение теоремы 1 в теории отображений, сохраняющих меру. Здесь под $\text{meas } E$ понимается мера Лебега множества E .

Теорема 3. Пусть $h \in (1; 2)$, $R > \mathcal{R}(h)$ и f – C^1 -диффеоморфизм \mathbb{B}_R на область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\text{meas } f(\lambda\mathbb{S}_h) = \text{meas } \lambda\mathbb{S}_h \forall \lambda \in \text{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$, то для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{B}_R$ выполняется $\text{meas } f(E) = \text{meas } E$.

Доказательства теорем 2 и 3 полностью повторяют доказательства аналогичных теорем из [15].

1. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al., 1992. P. 185-194.
2. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography. Contemp. Math., 2001. № 278. P. 69-74.
3. Williams S.A. A partial solution of the Pompeiu problem // Math. Ann. 1976. V. 223. P. 183-190.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. Springer. 2009, 671 p.
5. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers. 2003, 454 p.
6. Berenstein C.A., Gay R. Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. 1989. – V. 52. – P. 133-166.
7. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Экстремальные задачи интегральной геометрии // Математика сегодня № 1. – Вып. 12. – Киев. – 2001. – С. 51-79.
8. Машаров П.А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25-29.

9. Елец Л.В., Машаров П.А. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю // УМЖ, Т. 61. – 2009. – С. 61-72.
10. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. 2-е изд. – М.: Наука – 1991. – 576 с.
11. Волчков В.В. Преобразование Помпейю. Донецк: ДонГУ. – 1999. – 210 с.
12. Szabo G. On functions having the same integral on congruent semidisks // Ann. Univ. sci. Budapest. – 1982. – V. 3. – P. 3-9.
13. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. Киев, "Факт". – 2004. – 560 с.
14. Машаров П.А. Про циліндри з локальною властивістю Помпейю // Вістник Донецького національного університету. Серія А. Природничі науки. – 2000. – № 1. – С. 21-25.
15. Машаров П.А. Экстремальные задачи о множествах Помпейю со сферической границей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 153-161.

P. A. Masharov

On Pompeiu radius for spherical segments containing the half ball.

Exact value for the smallest radius of the ball, in which the given set is a Pompeiu set is obtained in the paper. The set is presented by the ball segment with the altitude is bigger than radius. The value in this paper essentially improve the known results.

Keywords: extremal version of the Pompeiu problem, Pompeiu radius, Pompeiu set, ball segment.

П. А. Машаров

Про екстремальний радіус Помпейю для кульових сегментів, що містять півкулю.

Отримано значення найменшого радіуса кулі, в якій дана множина є множиною Помпейю. У якості множини розглянуто кожен сегмент кулі, що має висоту більшу за радіус. Отримане значення істотно уточнює відомі раніше оцінки.

Ключові слова: екстремальний варіант проблеми Помпейю, радіус Помпейю, множина Помпейю, кульовий сегмент.

Донецкий национальный ун-т
pavelmasharov@gmail.com

Получено 01.12.2011

УДК 517.5

©2011. О. А. Очаковская

ПЛОТНОСТИ УПАКОВОК НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрены некоторые примеры функций с нулевыми интегралами по всем гиперболическим кругам одного фиксированного радиуса. Получены новые оценки плотностей упаковок гиперболических кругов.

Ключевые слова: шаровые средние, плотность укладки.

1. Введение. По поводу используемых ниже понятий и фактов, связанных с гиперболической плоскостью, см. [1].

Пусть \mathbb{C} – комплексная плоскость. Для множества $A \subset \mathbb{C}$ символами ∂A и \bar{A} обозначаются, соответственно, граница и замыкание A .

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ действует транзитивно на \mathbb{D} посредством конформных отображений (см., например, [2, гл. 2, §2.4]). Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости, реализованной в виде круга \mathbb{D} .

Группа $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ изоморфна группе $SU(1, 1)$, состоящей из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1,$$

которая действует на \mathbb{D} посредством отображений

$$gz = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}, \quad (1)$$

где черта означает комплексное сопряжение. Расстояние d и гиперболическая мера

$$d\mu(z) = \frac{dx dy}{(1 - |z|^2)^2} \quad (2)$$

инвариантны относительно группы $\mathcal{M}(\mathbb{D})$.

Пусть G – измеримое по Лебегу множество в \mathbb{D} . Символом $\text{meas}(G)$ обозначим гиперболическую меру множества G . Всюду в дальнейшем предполагается, что $0 < \text{meas}(G) < +\infty$.

Семейство $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_s)$ замкнутых подмножеств \mathbb{D} называется *упаковкой* (или *укладкой*) множества G , если

$$\bigcup_{j=1}^s K_j \subset G \quad \text{и} \quad \text{meas}(K_i \cap K_j) = 0 \quad \text{для всех } 1 \leq i, j \leq s, \quad i \neq j.$$

Плотность $d(G, \mathcal{K})$ этой упаковки определяется равенством

$$d(G, \mathcal{K}) = \frac{1}{\text{meas}(G)} \sum_{j=1}^s \text{meas}(K_j). \quad (3)$$

Проблема оценки величины $d(G, \mathcal{K})$ и ее евклидовых аналогов при различных G и \mathcal{K} изучалась многими авторами (см., например, [3]-[5] и библиографию к этим работам). Наиболее часто рассматривался следующий частный случай.

Пусть K – заданное замкнутое подмножество \mathbb{R}^n , $0 < \text{meas}(K) < +\infty$ и пусть M – заданная подгруппа группы $\mathcal{M}(\mathbb{D})$. Обозначим через $m(G, K, M)$ наибольшее количество непересекающихся образов $\lambda_j K \subset G$, $\lambda_j \in M$ (то есть, $\text{meas}(\lambda_j K) \cap (\lambda_i K) = 0$ для $\lambda_i \neq \lambda_j K$). Требуется оценить сверху величину $m(G, K, M)$ или, эквивалентно, плотность $d(G, \mathcal{K})$, где $\mathcal{K} = \{\lambda_j K\}$ является соответствующей упаковкой G . Для этого случая мы будем использовать обозначение $d(G, K, M)$ вместо $d(G, \mathcal{K})$. Очевидно

$$m(G, K, M) \leq \left\lceil \frac{\text{meas}(G)}{\text{meas}(K)} \right\rceil \quad \text{и} \quad d(G, K, M) \leq \frac{\text{meas}(K)}{\text{meas}(G)} \left\lceil \frac{\text{meas}(G)}{\text{meas}(K)} \right\rceil,$$

где $[t]$ – целая часть числа $t \in \mathbb{R}^1$. Эти оценки называют тривиальными. Один из способов получения нетривиальных оценок для указанных величин предложил Б.Д. Котляр (см. [6], а также [7]). Им было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что существует ненулевая функция $f \in L^\infty(G)$, для которой*

$$\int_{\lambda K} f(z) d\mu(z) = 0 \quad \text{для всех } \lambda \in M \text{ таких, что } \lambda K \subset G. \quad (4)$$

Тогда

$$m(G, K, M) \leq \left\lceil \frac{1}{\text{meas}(K)} \left(\text{meas}(G) - \frac{1}{\|f\|_{L^\infty(G)}} \int_G f(z) d\mu(z) \right) \right\rceil. \quad (5)$$

Таким образом, для получения нетривиальной оценки для $m(G, K, M)$ или $d(G, K, M)$ важно иметь ненулевую функцию f , удовлетворяющую (4). Более того, если запас таких функций окажется достаточно велик, можно надеяться на получение хорошей оценки, если взять в правой части (5) нижнюю грань по всем таким f .

Гиперболическим кругом радиуса $r > 0$ с центром $w \in \mathbb{D}$ называется множество

$$K_r(w) := \{z \in \mathbb{D} : d(z, w) \leq r\}.$$

В случае, когда K – гиперболический круг, ненулевые функции с условием (4) существуют (см., например, [5]) при любом M .

Для всякой области $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ символом $V_r(\mathcal{O})$ обозначим множество всех функций $f \in L^{1,loc}(\mathcal{O})$ таких, что

$$\int_{K_r(w)} f(x) d\mu(z) = 0 \quad (6)$$

для любого гиперболического круга $K_r(w) \subset \mathcal{O}$ (если \mathcal{O} не содержит таких кругов, то полагаем $V_r(\mathcal{O}) = L^{1,loc}(\mathcal{O})$).

Классы $V_r(\mathcal{O})$ и различные их обобщения изучались во многих работах (см., например, [5], [8] и библиографию к этим работам). Известно, что класс $V_r(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ является достаточно широким, однако он не содержит ненулевых функций, быстро стремящихся к нулю при $|z| \rightarrow 1$.

В связи с этим изучались точные условия, описывающие допустимую скорость убывания ненулевых функций класса $V_r(\mathcal{O})$ вблизи $\Lambda = \partial\mathcal{O} \cap \partial\mathbb{D}$. Однако, несмотря на активную работу в этой области, полученных точных результатов относительно немного (см. обзор в работе [8]).

В данной работе строятся новые примеры функций класса $V_r(\mathbb{D})$ (см. теорему 2 ниже). Это позволило получить нетривиальную оценку сверху для плотностей упаковок шаров с радиусами, связанными с нулями некоторой целой функции (см. теорему 3).

2. Вспомогательные сведения. Разложение Ивасава группы $SU(1, 1)$ имеет вид $SU(1, 1) = \mathcal{N}\mathcal{A}\mathcal{K}$, где

$$\mathcal{N} = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}^1 \right\}, \quad \mathcal{A} = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t \\ \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}^1 \right\},$$

и $\mathcal{K} = SO(2)$ – группа поворотов. Орбитами группы \mathcal{N} являются орициклы, касающиеся $\partial\mathbb{D}$ в точке $z = 1$. Орбитами группы \mathcal{A} являются дуги окружностей, проходящих через точки -1 и 1 , содержащиеся в круге \mathbb{D} . Из определений \mathcal{A} и \mathcal{N} видно, что

$$a_{t+\tau} = a_t a_\tau \quad \text{и} \quad n_s a_t = a_t n_{s e^{-2t}} \tag{7}$$

для любых $t, \tau, s \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, из (1) получаем

$$d(0, a_t 0) = d(0, t h t) = t \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}^1. \tag{8}$$

Всякое $z \in \mathbb{D}$ имеет вид

$$z = n_s a_t 0 = \frac{\text{sh } t - i s e^{-t}}{\text{ch } t - i s e^{-t}}, \tag{9}$$

где числа $s, t \in \mathbb{R}^1$ определены однозначно, при этом

$$s = -\frac{\text{Im} z}{|1 - z|^2}, \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}. \tag{10}$$

Используя (2) и (10), имеем

$$d\mu(z) = e^{-2t} dx dt.$$

Далее, пусть $K_r = K_r(0)$ и

$$Q_r = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : n_s a_t 0 \in K_r\}. \tag{11}$$

Простые вычисления с использованием (8) и (9) показывают, что

$$Q_r = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-r, r], |s| \leq U_r(t) e^t \text{ch } r\}, \tag{12}$$

где

$$U_r(t) = \begin{cases} \sqrt{th^2r \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}, & \text{если } t \in [-r, r] \\ 0, & \text{если } |t| > r. \end{cases}$$

Преобразование Фурье

$$\hat{U}_r(z) = \int_{-r}^r U_r(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

является четной целой функцией, удовлетворяющей условию

$$|\hat{U}_r(z)| \leq C e^{r|\Im z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

для некоторого $C > 0$, не зависящего от z . Нам потребуются некоторые свойства функции \hat{U}_r , содержащиеся в следующем утверждении.

Лемма. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Для любого $z \in \mathbb{C}$

$$\hat{U}_r(z) = \pi thr (\operatorname{ch} r)^{iz} F\left(\frac{3-iz}{2}, \frac{1-iz}{2}, 2, th^2 r\right), \quad (14)$$

где F – гипергеометрическая функция.

2. Функция \hat{U}_r имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули являются вещественными и простыми.

Доказательство леммы содержится в [9, леммы 4, 6]. В этой же работе имеются более подробные сведения о свойствах \hat{U}_r .

Обозначим $Z(\hat{U}_r) = \{z \in \mathbb{R}^1 : \hat{U}_r(z) = 0\}$.

Пусть $\mathcal{L} = 4(1 - |z|^2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ – оператор Лапласа-Бельтрами. Для любой $f \in C^2(\mathbb{D})$ выполнено равенство

$$\mathcal{L}f = e^{4t} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (15)$$

где $f(z) = F(s, t)$ (см. (9) и (10)). Если $\mathcal{L}f = -(\lambda^2 + 1)f$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\int_{K_r(w)} f(z) d\mu(z) = 2\hat{U}_r(-\lambda) \operatorname{sh} r f(w) \quad (16)$$

для любых $w \in \mathbb{D}$, $r > 0$ (см. (14) и [9, формула (29)]).

3. Доказательство теоремы 2.

Теорема 2. *Для любых $a \in (0, 1)$, $\gamma > 0$ и любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ положительных чисел, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} M_q^{1/q} \right)^{-1} < +\infty, \quad (17)$$

существует ненулевая вещественно-аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{D})$ такая, что

$$\int_{E(T,r)} |f(z)| \left(1 + \frac{|Imz|}{|1-z|^2}\right)^q d\mu(z) \leq M_q \exp(-\gamma e^{2T}) \quad (18)$$

при всех $E(T, r) \subset \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $\lambda, \xi > 0$. Тогда для функции $y(t)$, заданной для вещественных t следующим образом:

$$y(t) = \int_1^\infty (u^2 - 1)^{\frac{i\lambda+1}{2}} \exp\left(-\frac{u}{2}\xi e^{2t} + (1+i\lambda)t\right) du, \quad (19)$$

выполнено равенство

$$y(t) = \frac{\pi^{3/2} e^{\pi\lambda/4} 2^{i\lambda} e^t}{(1+e^{\pi\lambda})\Gamma(\frac{1-i\lambda}{2})\xi^{i\lambda/2}} H_{\frac{i\lambda}{2}}^{(1)}\left(\frac{i}{2}\xi e^{2t}\right), \quad (20)$$

где $H_{\frac{i\lambda}{2}}^{(1)}$ – функция Ганкеля первого рода (см. [10, формула (19.11)]). Из (20) и [10, формула (23.18)] следует, что y удовлетворяет уравнению

$$y'' - 2y' + (\lambda^2 + 1 - \xi^2 e^{4t})y = 0. \quad (21)$$

Положим

$$g(z, \xi) = y(t)e^{i\xi s}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (22)$$

(см. (9)). Из равенств (21) и (15) получаем

$$(1 - |z|^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g(z, \xi) = (1 + \lambda^2)g(z, \xi). \quad (23)$$

Пусть $r > 0$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\hat{U}_r(-\lambda) = 0$ (см. лемму). Тогда из (23) и (16) следует, что

$$\int_{K_r(w)} g(z, \xi) d\mu(z) = 2g(w, \xi)\hat{U}_r(-\lambda) \operatorname{sh} r = 0 \quad (24)$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. Полагая $h(\xi) = \operatorname{Reg}(0, \xi)$, из (19) и (22)имеем

$$h(\xi) = \int_1^\infty e^{-u\xi/2} (u^2 - 1)^{1/2} \cos\left(\frac{\lambda}{2} \ln(u^2 - 1)\right) du.$$

Отсюда следует, что функция h является вещественно-аналитической функцией на $(0, +\infty)$, не равной нулю тождественно. Таким образом, множество нулей функции h на $(0, +\infty)$ нигде не плотно. Тогда для любого $\gamma > 0$ существуют числа $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ такие, что

$$2e^{2r}\gamma < \alpha < \beta, \quad (25)$$

и функция h сохраняет знак на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Далее, пусть последовательность $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел удовлетворяет условию (17). Из [11, теорема 1.3.8] следует, что для любого $A > 1$ существует ненулевая неотрицательная функция $\varphi_A \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с носителем на (α, β) такая, что

$$\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]} \leq M_q A^{-q} \quad \text{для всех } q \in \mathbb{Z}_+. \quad (26)$$

Умножая (24) на $\varphi_A(\xi)$ и интегрируя полученное равенство на $[\alpha, \beta]$, находим

$$\int_{K_r(w)} f(z) d\mu(z) = 0 \quad \text{для всех } w \in \mathbb{D},$$

где

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} g(z, \xi) \varphi_A(\xi) d\xi. \quad (27)$$

Это означает, что $f \in V_r(\mathbb{D})$. Кроме того, из (23) и (27) имеем $\mathcal{L}f = (\lambda^2 + 1)f$.

В силу эллиптичности оператора \mathcal{L} отсюда вытекает, что f является вещественно-аналитической в \mathbb{D} . Поскольку функция $h\varphi_A$ сохраняет знак на (α, β) , из (27) и определения h следует, что $f(0) \neq 0$. Докажем теперь, что f удовлетворяет условию (18). Из (27), (22) и (19) имеем

$$f(z) = \int_1^{\infty} (u^2 - 1)^{\frac{i\lambda+1}{2}} e^{(1+i\lambda)t} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_A(\xi) \exp\left(i\xi s - \frac{u}{2}\xi e^{2t}\right) d\xi dt. \quad (28)$$

Интегрирование по частям показывает, что внутренний интеграл в (28) не превосходит величины

$$(\beta - \alpha) \left| s + \frac{i u}{2} e^{2t} \right|^{-q} \exp\left(-\frac{u}{2} \alpha e^{2t}\right) \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]}$$

при любом $q \in \mathbb{N}$.

Отсюда и из (28) имеем

$$|f(z)| \leq (\beta - \alpha) \left| s + \frac{i}{2} e^{2t} \right|^{-q} \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]} e^t \int_1^{\infty} u \exp\left(-\frac{u}{2} \alpha e^{2t}\right) du \quad (29)$$

при всех $z \in \mathbb{D}$. Пусть теперь $z \in \mathbb{D}_a$. Тогда из (10) и определения \mathbb{D}_a следует, что

$$tht > 2a - 1. \quad (30)$$

Учитывая, что

$$\int_1^{\infty} u \exp\left(-\frac{u}{2} \alpha e^{2t}\right) du = \frac{2e^{-2t}}{\alpha} \left(1 + \frac{2e^{-2t}}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} e^{2t}\right),$$

из (29), (30) и (25) получаем

$$|f(z)|e^{-2t} \leq \frac{B^q}{(1+|s|)^q} \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}e^{2t}\right), \quad z \in \mathbb{D}_a, \quad q \in \mathbb{N} \quad (31)$$

для некоторой постоянной $B > 1$, зависящей только от r, α, β, a . Выбирая теперь $A > B$ и используя (2), из неравенств (31) и (26) получаем (18). Итак, функция f удовлетворяет всем требуемым условиям и теорема 2 доказана.

4. Оценки плотности упаковок. Пусть $\lambda > 0$. Символом Φ обозначим множество всех непрерывных неотрицательных финитных функций на $(0, +\infty)$. Пусть также $F(z, \varphi) = \int_0^\infty g(z, \xi)\varphi(\xi)d\xi$, где $\varphi \in \Phi$ и g определяется равенством (22).

Теорема 3. Пусть \mathcal{K} – упаковка множества G , состоящая из гиперболических кругов, радиусы r которых удовлетворяют условию $U_r(\lambda) = 0$. Тогда

$$d(G, \mathcal{K}) \leq 1 - \frac{1}{\text{meas}(G)} \sup \frac{1}{\|F(\cdot, \varphi)\|_{L^\infty(G)}} \left| \int_G F(z, \varphi) d\mu(z) \right|,$$

где \sup берется по множеству всех ненулевых $\varphi \in \Phi$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_s)$ и $A = \bigcup_{j=1}^s K_j$. Согласно теореме 2,

$$\int_{K_j} F(z, \varphi) d\mu(z) \quad \text{для всех } j \in \{1, \dots, s\}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_G F(z, \varphi) d\mu(z) \right| &= \left| \int_{G \setminus A} F(z, \varphi) d\mu(z) + \int_A F(z, \varphi) d\mu(z) \right| \\ &= \left| \int_{G \setminus A} F(z, \varphi) d\mu(z) \right| \leq \|F(\cdot, \varphi)\|_{L^\infty(G)} \text{meas}(G \setminus A). \end{aligned}$$

Следовательно, для ненулевой $\varphi \in \Phi$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s \text{meas}(K_j) &= \text{meas}(D) = \text{meas}(G) - \text{meas}(G \setminus A) \\ &\leq \text{meas}(G) - \frac{1}{\|F(\cdot, \varphi)\|_{L^\infty(G)}} \left| \int_G F(\cdot, \varphi) d\mu(z) \right|. \end{aligned}$$

В силу произвольности φ отсюда и из (1) следует утверждение теоремы 3. \square

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
2. Альфорт Л. Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986. – 163 с.
3. Конвей Дж., Слоен Н. Упаковки шаров, решетки и группы. – Т. 1, 2. – М.: Мир, 1990. – 761 с.
4. Рождерс К. Укладки и покрытия. – М.: Мир, 1968. – 148 с.
5. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
6. Kotlyar B.D. Packing of parallelotopes and some another sets. – Sibirsk. Mat. Zh. – V. 25. – № 2. – С. 222-225.
7. Kotlyar B.D. Densities of packings of bounded sets. – Soobsheniya A. N. Gruz. SSR. – V. 126. – № 3. – С. 469-672.
8. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – Springer-Verlag London Limited, 2009. – 671 p.
9. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах. – Известия РАН. – 65. – 2. – 2001. – С. 3-26.
10. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
11. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

О. А. Ochakovskaya

Densities of packings on hyperbolic plane.

Some examples of functions with zero integrals over hyperbolic disks of one fixed radius are considered. New estimates for the densities of hyperbolic disks packing are obtained.

Keywords: *spherical means, density of packing, hyperbolic plane.*

О. О. Очаковська

Щільність упаковок на гіперболічній площині.

Розглянуто деякі приклади функцій з нульовими інтегралами по усіх гіперболічних колах фіксованого радіуса. Отримано нові оцінки щільностей для упаковок гіперболічних кіл.

Ключові слова: *сферичні середні, щільність упаковок, гіперболічна площина.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakovska@yandex.ua

Получено 20.11.11

УДК 517.51 + 519.21

©2011. М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков

ПРО ОДИН КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ЗІ СКЛАДНОЮ ЛОКАЛЬНОЮ БУДОВОЮ, БІЛЬШІСТЬ З ЯКИХ СИНГУЛЯРНІ АБО НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНІ

Досліджується скінченнопараметрична сім'я функцій, які є або сингулярними, або звивистими, зокрема, ніде не диференційовними. Вказано систему функціональних рівнянь, що визначає кожну з таких функцій в класі визначених та обмежених на $[0, 1]$ функцій. Вивчаються інтегральні, диференціальні та фрактальні властивості функцій даної сім'ї.

Ключові слова: сингулярна функція, звивиста функція, недиференційовна функція, самоафінна множина, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, s -кова система числення, перетворення, що зберігають фрактальну розмірність.

1. Вступ. Неперервні функції за своїми локальними властивостями часто принципово різняться. Мова йде не про гладкі функції, а про функції зі складною локальною будовою, які мають “особливості” в кожному як завгодно малому інтервалі. До цієї “категорії” функцій відносять звивисті та сингулярні функції. Перші не мають проміжків монотонності, але в кожному як завгодно малому відрізку мають найбільше та найменше значення. Теореми Банаха-Мазуркевича [8] та Замфіреску [15] свідчать про те, що сім'ї таких функцій “немалі”, а отже, заслуговують на увагу. В останній час інтерес до таких функцій посилюється, їм присвячено чимало робіт, зокрема [4, 10, 1, 2, 3, 5]. Для них існує спільна проблема – проблема наявності ефективного “апарату” задання та дослідження. Слідуючи принципу “від простого до складного”, до цих пір були вивчені функції, які мають відносно прості локальні властивості, а саме: володіють властивостями самоподібності та самоафінності. Для цього класу функцій ми шукаємо альтернативні шляхи задання та вивчення, вбачаючи в теорії функціональних рівнянь деякий потенціал.

Відмінна від сталої неперервна функція, похідна якої рівна нулю майже скрізь (у розумінні міри Лебега) називається *сингулярною*. Простим прикладом такої є функція Кантора – неперервна функція розподілу на відрізку $[0, 1]$, яка зростає в точках класичної множини Кантора і є постійною на інтервалах, суміжних з нею (її графіком є канторівські сходи).

Чи існують строго зростаючі сингулярні функції? Мало відомо, що ствердну відповідь на це, в свій час непросте, запитання ще на початку 20-го століття дав Хелінгер. Пізніше вони фігурували в роботах Мінковського [13], Серпінського [7] та ін. Вважається, що найпростіший приклад строго зростаючої сингулярної функції належить Салему [14]. Сьогодні існують десятки робіт, в яких такі функції вивчаються (див. [4, 9]).

Тривалий час сингулярні функції відносилися до класу математичної екзотики, їх до цих пір практично не можна зустріти в університетському курсі математич-

ного аналізу, тоді як добре відома теорема Лебега стверджує, що кожен монотонну функцію f можна розкласти в лінійну комбінацію $\alpha_1 f_d + \alpha_2 f_{ac} + \alpha_3 f_s$ ($\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$) трьох монотонних функцій: дискретної f_d , абсолютно неперервної f_{ac} та сингулярної f_s . Більше того, в 1981 році Т. Замфіреску [15] довів, що “більшість” неперервних монотонних функцій є сингулярними, оскільки останні в метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера. Більш як за 100 років розвитку теорія сингулярних функцій збагачувалась в основному за рахунок індивідуальних теорій (досліджувались окремі функції або скінченнопараметричні сім’ї функцій), загальна ж теорія до цих пір є слабо розвинутою, вона містить невелику кількість розрізнених фактів. Разом з цим дослідження сингулярних функцій в останній час активізувалось завдяки їх зв’язку з теорією фракталів.

Похідна строго зростаючої сингулярної функції на довільному, як завгодно малому, проміжку області визначення принаймні в одній точці є нескінченною. Тому інтуїтивно здавалось, що перетворення під дією такої функції “сильно трансформують” простір. Ця наївна думка спростована в [6, 10], де доведено, що існують строго зростаючі сингулярні функції, які зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича, тоді коли деякі абсолютно неперервні – ні.

Труднощі розвитку загальної та індивідуальної теорії сингулярних функцій пов’язані з відсутністю ефективного апарату для їх задання та дослідження. В останній час для цього використовують різні системи зображення дійсних чисел і теорію рядів. Часто сингулярні функції виникають в дослідженнях з теорії ймовірностей, при вивченні розподілів випадкових величин типу Джессена-Вінтнера та їх аналогів [4], зокрема, нескінченних згортки Бернуллі. Зазначимо, що сингулярні функції домінують в класах функцій розподілу випадкових величин, цифри яких в тій чи іншій системі зображення є незалежними.

Одній сім’ї вказаних функцій присвячена дана робота.

2. Визначення функцій системою функціональних рівнянь. Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A = \{0, 1, \dots, s - 1\}$, p_0, p_1, \dots, p_{s-1} – дійсні числа такі, що $p_0 + p_1 + \dots + p_{s-1} = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_k = \sum_{i=0}^{k-1} p_i > 0$, $p_* = \max_i |p_i| < 1$, $k = 1, \dots, s - 1$.

Розглядається система з s функціональних рівнянь

$$f\left(\frac{i+x}{s}\right) = \beta_i + p_i f(x), i = 0, 1, \dots, s - 1. \quad (1)$$

Якщо $x = \alpha_1 \cdot s + \alpha_2 \cdot s^{-2} + \dots + \alpha_n \cdot s^{-n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$, то $\frac{i+x}{s} = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$. І тому система (1) може бути записана у вигляді

$$f\left(\Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s\right) = \beta_i + p_i f\left(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s\right). \quad (2)$$

Знайдемо функції, які задовольняють систему (1), визначені на $[0, 1]$ і обмежені.

Теорема 1. *Існує лише одна функція f , яка задовольняє систему (1), є визначеною в кожній точці $[0, 1]$ і обмеженою, причому її можна подати у вигляді:*

$$f(x) = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j} \right), \quad \text{де } x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s \quad (3)$$

Доведення. Використовуючи рівності (2) m разів, отримаємо розклад

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \beta_{\alpha_1} + p_{\alpha_1} f(\Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^s) = \\ &= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} p_{\alpha_1} + p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} f(\Delta_{\alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n \dots}^s) = \dots = \\ &= \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} p_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_m} \prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j} + \left(\prod_{j=1}^m p_{\alpha_j} \right) f(\Delta_{\alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \alpha_{m+k} \dots}^s). \end{aligned}$$

Цей процес можна продовжувати до нескінченності, оскільки функція визначена в усіх точках $[0, 1]$, а отже, має зміст вираз $f(\Delta_{\alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \alpha_{m+k} \dots}^s)$. Оскільки

$$\left| \prod_{j=1}^m p_{\alpha_j} \right| \leq p_*^m \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty), \quad \left| f(\Delta_{\alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \alpha_{m+k} \dots}^s) \right| \leq C = \text{const},$$

то залишковий член

$$\left(\prod_{j=1}^m p_{\alpha_j} \right) f(\Delta_{\alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots \alpha_{m+k} \dots}^s)$$

прямує до нуля, коли $m \rightarrow \infty$. Тому послідовність

$$B_m = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} p_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_m} (p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_{m-1}})$$

має границю, що є значенням функції f в точці x . Отже, має місце розклад (3). \square

Доведемо *коректність* визначення функції f рівністю (3), тобто що її значення від двох різних зображень s -ково раціонального числа $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n(0)}^s = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} (\alpha_n - 1) ((s-1))}^s$ співпадають. З цією метою розглянемо різницю

$$\begin{aligned} \delta &= f\left(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n(0)}^s\right) - f\left(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} (\alpha_n - 1) ((s-1))}^s\right) = \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\alpha_j} \right) \left(\beta_{\alpha_n} - \beta_{\alpha_n - 1} - \beta_{s-1} p_{\alpha_n - 1} \left(1 + p_{s-1} + p_{s-1}^2 + \dots + p_{s-1}^k + \dots \right) \right) = \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\alpha_j} \right) (\beta_{\alpha_n} - (\beta_{\alpha_n - 1} + p_{\alpha_n - 1})) = 0. \end{aligned}$$

Отже, значення співпадають і функція визначена коректно.

Лема 1. Функція f , визначена рівністю (3), є неперервною в усіх точках $[0, 1]$.

Доведення. Розглянемо довільне $x_0 \in [0, 1]$ і різницю

$$f(x) - f(x_0) = \left(\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j} \right) \left(f \left(\Delta_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)\dots\alpha_{m+k}(x)\dots}^s \right) - f \left(\Delta_{\alpha_m(x_0)\dots\alpha_{m+k}(x_0)\dots}^s \right) \right),$$

де $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i < m$ і $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$.

1) Якщо x_0 – s -ково ірраціональна точка, то $x \rightarrow x_0$, що рівносильно $m \rightarrow \infty$, і

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C \prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),$$

тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ і функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0 за означенням.

2) Якщо $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^s = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} (\alpha_n - 1) ((s-1))}^s$ – s -ково раціональне число, то можна скористатись міркуваннями пункту 1), але при розгляді випадку, коли x прямує до x_0 зліва досить використати друге зображення числа x_0 , а коли x прямує до x_0 справа – перше. \square

Наслідок 1. Система функціональних рівнянь (1) в класі неперервних функцій на $[0, 1]$ має єдиний розв'язок – функцію, визначену рівністю (3).

3. Умови монотонності та звивистості функцій.

Означення 1. Відрізок $[\Delta_{c_1 \dots c_m}^s; \Delta_{c_1 \dots c_m ((s-1))}^s]$ називається циліндром (або циліндричним відрезком) рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$. Його коротко позначатимемо: $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s$, а приріст функції f на цьому відрізку через $\mu_f(\Delta_{c_1 \dots c_m}^s)$, тобто

$$\mu_f(\Delta_{c_1 \dots c_m}^s) := f(\Delta_{c_1 \dots c_m ((s-1))}^s) - f(\Delta_{c_1 \dots c_m}^s).$$

Лема 2. Має місце рівність $\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s) = \prod_{i=1}^m p_{c_i}$.

Справді, використовуючи означення 1 і вираз значення функції (3), маємо

$$\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s) = \left(\prod_{i=1}^m p_{c_i} \right) \left(\beta_{s-1} - \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{s-1} p_{s-1}^k \right) = \prod_{i=1}^m p_{c_i}.$$

Наслідок 2. Функція f є сталою на $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s$ лише тоді, коли існує $p_{c_k} = 0$, де $k \leq m$.

Наслідок 3. Якщо всі $p_i \geq 0$, то f є неспадною, а при $p_i > 0$ – строго зростаючою.

Лема 3. Якщо серед чисел p_0, \dots, p_{s-1} не існує нуля і знайдеться $p_i < 0$, то функція не має жодного проміжку монотонності (є звивистою [1]).

Доведення. Припустимо, що при виконанні умов леми знайдеться інтервал $(a, b) \subset [0, 1]$ монотонності функції f . Тоді існує s -ковий циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^s$, який повністю належить (a, b) , а отже, є проміжком монотонності f .

Оскільки $p_0 p_1 \dots p_{s-1} \neq 0$, то $\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s) \neq 0$ і $\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^s) \cdot \mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^s) < 0$, тобто на одному з циліндрів $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 0}^s, \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^s$ функція має додатній, а на іншому – від’ємний приріст, що суперечить монотонності f на $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^s$. \square

4. Самоафінні властивості. Нагадаємо, що перетворення (бієктивне відображення множини на себе) простору R^2 називається *афінним*, якщо воно кожні три точки, які лежать на одній прямій переводить в три точки, що теж лежать на одній прямій.

Означення 2. Множина $E \subset R^2$ називається *самоафінною*, якщо існує набір $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ($n > 1$) афінних перетворень R^2 таких, що

$$E = \varphi_1(E) \cup \varphi_2(E) \cup \dots \cup \varphi_n(E), \text{ де } \varphi_i(E) \neq \varphi_j(E) \text{ при } i \neq j. \quad (4)$$

Як відомо, кожне афінне перетворення φ_i аналітично задається формулами

$$\begin{cases} x' = a_{11}^{(i)}x + a_{12}^{(i)}y + x_0^{(i)}, \\ y' = a_{21}^{(i)}x + a_{22}^{(i)}y + y_0^{(i)}; \end{cases} \text{ причому } \begin{vmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Означення 3. *Самоафінною розмірністю* самоафінної множини (4)-(5) називається число, яке є розв’язком рівняння

$$\sum_{i=1}^n \left| a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{21}^{(i)} a_{12}^{(i)} \right|^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Легко бачити, що самоафінність множини є узагальненням самоподібності [4]. Можна довести, що самоафінна розмірність є числом не меншим розмірності Хаусдорфа-Безиковича, а при деяких умовах співпадає з нею. Якщо самоафінна множина є самоподібною, то її самоафінна розмірність співпадає з самоподібною розмірністю.

Теорема 2. *Якщо $p_0 p_1 \dots p_{s-1} \neq 0$, то графік Γ функції (3) є самоафінною множиною простору \mathbb{R}^2 , причому*

$$\Gamma = \varphi_0(\Gamma) \cup \varphi_1(\Gamma) \cup \dots \cup \varphi_{s-1}(\Gamma), \quad (6)$$

де

$$\varphi_i : \begin{cases} x' = \frac{1}{s}x + \frac{i}{s}, \\ y' = \beta_i + p_i y; \end{cases} \quad \varphi_i(\Gamma) \cap \varphi_{i+1}(\Gamma) = C_{i+1} \left(\frac{i+1}{s}; \beta_{i+1} \right). \quad (7)$$

Самоафінна розмірність графіка Γ є розв’язком рівняння

$$\sum_{i=0}^{s-1} \left| \frac{p_i}{s} \right|^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Доведення. Для доведення рівності (6) спочатку покажемо, що

$$\varphi_0(\Gamma) \cup \varphi_1(\Gamma) \cup \dots \cup \varphi_{s-1}(\Gamma) \equiv G \subset \Gamma.$$

Справді, розглянемо довільну точку M графіка Γ

$$\Gamma \ni M(x; f(x)) \xrightarrow{\varphi_i} M_i\left(\frac{1}{s}x + \frac{i}{s}; \beta_i + p_i f(x)\right) = \varphi_i(M) \in \Gamma.$$

Тепер покажемо, що $\Gamma \subset G$. Нехай $M(x; f(x)) \in \Gamma$. Розглянемо число $x_1 = \Delta_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)}^2$. Оскільки $\alpha_1(x) \in A$, то $f(x) = \beta_i + p_i f(x_1)$ і з того, що $\overline{M}(x_1; f(x_1)) \in \Gamma$ випливає, що $\varphi_i(\overline{M}) = M(x; f(x)) \in G$. Рівність (6) доведено.

Оскільки

$$O(0; 0) \xrightarrow{\varphi_i} C_i\left(\frac{i}{s}; \beta_i\right), \quad C(1; 1) \xrightarrow{\varphi_i} C_{i+1}\left(\frac{i+1}{s}; \beta_{i+1}\right), \quad i \in A,$$

то має місце рівність (7). Самоафінна розмірність графіка Γ є розв'язком вказаного рівняння згідно з означенням. \square

5. Інтегральні властивості.

Теорема 3. *Для інтеграла Лебега має місце рівність*

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{s-1} (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{s-1}).$$

Доведення. Використовуючи адитивну властивість інтеграла Лебега, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{s}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{s}}^{\frac{2}{s}} f(x) dx + \dots + \int_{\frac{s-1}{s}}^1 f(x) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{s}} p_0 f(\Delta_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)}^s) dx + \int_{\frac{1}{s}}^{\frac{2}{s}} [p_0 + p_1 f(\Delta_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)}^s)] dx + \dots + \\ &\quad + \int_{\frac{s-1}{s}}^1 [\beta_{s-1} + p_{s-1} f(\Delta_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)}^s)] dx = \\ &= \frac{1}{s} p_0 \int_0^1 f(x) dx + p_0 x \Big|_{\frac{1}{s}}^{\frac{2}{s}} + \frac{1}{s} p_1 \int_0^1 f(t) dt + \dots + \beta_{s-1} x \Big|_{\frac{s-1}{s}}^1 + \frac{1}{s} p_{s-1} \int_0^1 f(t) dt. \end{aligned}$$

де $t = \Delta_{\alpha_2(x)\alpha_3(x)\dots}^s$. Звідки

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{s}(p_0 + p_1 + \dots + p_{s-1})\right] \int_0^1 f(x)dx &= \frac{s-1}{s} \int_0^1 f(x)dx = \\ &= \frac{1}{s}(p_0 + (p_0 + p_1) + \dots + (p_0 + p_1 + \dots + p_{s-2})), \\ \int_0^1 f(x)dx &= \frac{1}{s-1} (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{s-1}). \quad \square \end{aligned}$$

6. Сингулярні функції.

Лема 4. Якщо $p_i = \frac{1}{s}$ для всіх $i \in A$, то $f(x) = x$. Справді, $f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{1}{s}f(\Delta_{\alpha_2\dots\alpha_n}^s) = \dots = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \frac{\alpha_3}{s^3} + \dots = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^s$.

Лема 5. Якщо $p_i \geq 0$, $i = \overline{0, s-1}$, то f є неперервною функцією розподілу на $[0, 1]$.

Доведення. Оскільки $f(0) = f(\Delta_{(0)}^s) = 0 + p_0f(\Delta_{(0)}^s)$, то $(1 - p_0)f(\Delta_{(0)}^s) = 0$, а отже, $f(0) = 0$. Оскільки $f(1) = f(\Delta_{(s-1)}^s) = \beta_{s-1} + p_{s-1}f(\Delta_{(s-1)}^s)$, то $(1 - p_{s-1})f(\Delta_{(s-1)}^s) = \beta_{s-1} = 1 - p_{s-1}$, а отже, $f(1) = 1$.

Нехай $x_1 < x_2$. Тоді існує m таке, що $\alpha_i(x_1) = \alpha_i(x_2)$ при $i < m - 1$ і $\alpha_m(x_1) < \alpha_m(x_2)$. Тому

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \left(\prod_{j=1}^{m-1} p_{\alpha_j(x_1)} \right) \times \\ &\times \left(\beta_{\alpha_m(x_2)} - \beta_{\alpha_m(x_1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_m+k(x_2)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_m+j(x_2)} \right) - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_m+k(x_1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_m+j(x_1)} \right) \right). \end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha_m(x_2)} - \beta_{\alpha_m(x_1)} &= p_{\alpha_m(x_1)} + p_{\alpha_m(x_1)+1} + \dots + p_{\alpha_m(x_2)-1} \geq p_{\alpha_m(x_1)}, \\ \rho &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_m+k(x_2)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_m+j(x_2)} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_m+k(x_1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_m+j(x_1)} \right) \geq \\ &\geq - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_m+k(x_1)} \prod_{j=0}^{k-1} p_{\alpha_m+j(x_1)} \right) \geq -p_{\alpha_m(x_1)} \sum_{k=0}^{\infty} [\beta_{s-1} p_{s-1}^k] = -p_{\alpha_m(x_1)}. \end{aligned}$$

Тому $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ і функція f є неспадною. Таким чином, за лемою 1 і доведеними властивостями, вона є неперервною функцією розподілу на $[0, 1]$. \square

Теорема 4. Функція f є функцією розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими s -ковими цифрами, а саме:

$$\xi = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \dots}^s, \text{ де } \eta_k - \text{ незалежні і } P\{\eta_k = i\} = p_i, i = \overline{0, s-1}.$$

Доведення. Згідно з означенням функції розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, але

$$\{\xi < x\} = \{\eta_1 < \alpha_1(x)\} \cup \{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 < \alpha_2(x)\} \cup \dots$$

$$\cup \{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), \dots, \eta_{k-1} = \alpha_{k-1}(x), \eta_k < \alpha_k(x)\} \cup \dots,$$

причому події, що входять до об'єднання, несумісні. Враховуючи незалежність η_k ,

$$P\{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), \dots, \eta_{k-1} = \alpha_{k-1}(x), \eta_k < \alpha_k(x)\} = \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)}.$$

А тому має місце рівність (3). Отже, $f(x) = F_\xi(x)$. \square

Нагадаємо, що спектром неспадної функції називається множина всіх її точок росту. Відомо [4], що спектр є замкнутою, а для неперервної функції – досконалою множиною.

Лема 6. [4] Якщо $p_i \geq 0$, то спектром функції F_ξ є множина $S_{F_\xi} = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^s, p_{\alpha_j} > 0 \forall j \in N\}$, яка співпадає з $[0, 1]$, коли $p_i > 0$ для кожного $i \in A$, і є ніде не щільною самоподібною нуль-множиною Лебега, множиною з самоподібною розмірністю $\log_s t$, де $t = \#\{i : p_i > 0, i \in A\}$, коли існує $p_i = 0$.

Лема 7. Якщо в s -ково ірраціональній точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$, то

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (sp_{\alpha_j(x_0)}) = \prod_{j=1}^{\infty} (sp_{\alpha_j(x_0)}). \quad (8)$$

Доведення. Оскільки $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^s$, то

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^s)}{|\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^s|} = \lim_{n \rightarrow \infty} s^n \prod_{j=1}^n (p_{\alpha_j(x_0)}) = \prod_{j=1}^{\infty} (sp_{\alpha_j(x_0)}). \quad \square$$

Наслідок 4. Якщо існує $p_m = 0$, то функція f є сингулярною.

Зауваження. Якщо $p_i < 0, p_m = 0$, то f не є монотонною на $[0, 1]$, але є сингулярною.

Наслідок 5. Якщо $s|p_i| > 1$ для довільного $i = \overline{0, s-1}$, то функція f не має скінченної похідної в жодній s -ково ірраціональній точці відрізка $[0, 1]$.

Теорема 5. Якщо всі $p_i \geq 0$ і існує $p_k \neq \frac{1}{s}$, то функція $f(x) = F_\xi(x)$ є сингулярною, строго зростаючою, якщо $p_i > 0, i = \overline{0, s-1}$, і канторівського типу, якщо існує $p_m = 0$.

Для $p_i > 0, i = \overline{0, s-1}$, сингулярність F_ξ вперше довів Салем [14], використавши при цьому метод нормальних чисел. Пізніше для $s = 2$ це робилося в роботах [11, 12].

Якщо всі $p_i \geq 0$, причому існує $p_m = 0$, то спектром функції F_ξ буде множина чисел, які в своїх s -кових зображеннях не використовують цифру m . Вона, як відомо, має нульову міру Лебега. На суміжних з цією множиною інтервалах функція є сталою, отже, має похідну рівну нулю. А тому сингулярність функції в даному випадку очевидна.

7. Функція F_ξ як неперервне перетворення відрізка $[0, 1]$. Кажуть [10], що перетворення g відрізка $[0, 1]$ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(\cdot)$, якщо для довільної борелівської множини $E \subset [0, 1]$ і її образу $E' = g(E)$ розмірності співпадають, тобто $\alpha_0(E) = \alpha_0(E')$. Якщо існує борелівська множина $E \subset [0, 1]$ така, що $\alpha_0(E) \neq \alpha_0(E')$, то кажуть, що перетворення g не зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича. Клас неперервних перетворень $[0, 1]$ вичерпується строго зростаючими функціями розподілу на $[0, 1]$ та функціями виду $q(x) = 1 - F(x)$, де F – функція розподілу.

Теорема 6. Якщо серед додатних чисел p_0, p_1, \dots, p_{s-1} існує принаймні одне число, відмінне від $\frac{1}{s}$, то функція F_ξ розмірність Хаусдорфа-Безиковича не зберігає.

Доведення. Нехай $s = 2$. Для кожного $i \in \{0, 1\}$ розглянемо множину

$$D = D[2, \overline{ii}] \equiv \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^2, \text{ де } (\alpha_k, \alpha_{k+1}) \neq (i, i) \forall k \in N\}.$$

Очевидно, що D є самоподібною множиною, оскільки $D[2, \overline{ii}] = D_1 \cup D_2$, де

$$D_1 = \Delta_{i-1}^2 \cap D, \quad D_2 = \Delta_{i(1-i)}^2 \cap D, \quad \text{причому} \quad D \stackrel{\frac{1}{2}}{\sim} D_1 \text{ і } D \stackrel{\frac{1}{4}}{\sim} D_2.$$

Самоподібна розмірність [4] множини D є розв'язком рівняння $(2)^{-x} + (4)^{-x} = 1$, тобто $x = 1 - \log_2(\sqrt{5} - 1)$, і співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

Образом D при перетворенні F_ξ є множина $D' = \{y : y = F_\xi(x), x \in D\}$, яка є самоподібною: $D' = D'_1 \cup D'_2$, де $D' \stackrel{p_1-i}{\sim} D'_1 = F_\xi(D_1)$, $D' \stackrel{p_0 p_1}{\sim} D'_2 = F_\xi(D_2)$, причому $D'_1 \cap D'_2 = \emptyset$. Рівняння для визначення самоподібної розмірності множини D' має вигляд

$$p_i^x + (p_0 p_1)^x = 1.$$

Оскільки $p_0 \neq \frac{1}{2}$, то $p_0 < \frac{1}{2}$ або $p_1 < \frac{1}{2}$. Розглянемо i таке, що $p_i < \frac{1}{2}$. Покажемо, що самоподібні розмірності множин D і D' для такого i не співпадають.

Справді, якщо $p_i < \frac{1}{2}$, то

$$p_i^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ і } (p_0 p_1)^x < \left(\frac{p_0 + p_1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

Тому самоподібна розмірність множини D менша, ніж в множини D' . Оскільки для даних множин розмірність Хаусдорфа-Безиковича співпадає з самоподібною розмірністю, то функція F_ξ розмірність Хаусдорфа-Безиковича не зберігає.

Нехай $s > 2$ і існує $p_i \neq \frac{1}{s}$. Можливі випадки: 1) $p_i < \frac{1}{s}$; 2) $p_i > \frac{1}{s}$. Множина

$$C \equiv C[s, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^s, \alpha_n \in V = \{j, k\}\}$$

і її образ $C' = f(C)$ є самоподібними і їх самоподібна розмірність співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

Розмірність першої множини є розв'язком рівняння $2 \cdot s^{-x} = 1$, тобто $x = \log_s 2$, другої – $p_j^x + p_k^x = 1$. Якщо p_j і p_k задовольняють одну з умов: а) одночасно більші $\frac{1}{s}$, або менші $\frac{1}{s}$; б) одне з них більше, а інше рівне $\frac{1}{s}$; в) одне менше, а інше рівне $\frac{1}{s}$, то розв'язок останнього рівняння не дорівнює $\log_s 2$, а отже, множини C і C' мають різні розмірності.

Покажемо, що завжди існує пара (j, k) така, що виконується одна з трьох вказаних умов. Справді, якщо знайдеться $p_a = \frac{1}{s}$, то виконується умова б) або в) і $\{j, k\} = \{i, a\}$. Якщо $p_a \neq \frac{1}{s} \forall a \in A = \{0, 1, \dots, s-1\}$, то завжди серед p_0, p_1, \dots, p_{s-1} знайдеться принаймні два числа, які є меншими або більшими $\frac{1}{s}$ одночасно. Теорему доведено. \square

8. Диференціальні властивості звивистих функцій. Нехай серед чисел p_0, p_1, \dots, p_{s-1} є від'ємні. Нагадаємо, що $\beta_i = p_0 + p_1 + \dots + p_{i-1} > 0$. В цій ситуації $s > 2$. Розглянемо випадок $s = 3$.

Лема 8. Якщо $p_1 \cdot p_2 < 0$, то $3p_0 > 1$ або $3p_j > 1$, де $p_j > 0$.

Доведення від супротивного. Нехай при виконанні умов твердження одночасно виконуються нерівності $3p_0 \leq 1$ і $3p_j \leq 1$. Тоді

$$p_0 + p_j \leq \frac{2}{3} \quad \text{або} \quad 1 - p_i \leq \frac{2}{3},$$

де $i = \{1, 2\} - \{j\}$. Звідки $p_i \geq \frac{1}{3}$, що суперечить від'ємності p_i . \square

Теорема 7. Якщо $p_1 < 0$, то функція f не має похідної в жодній трійково-раціональній точці відрізка $[0, 1]$.

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta_{a_1 \dots a_n}^3 = \Delta_{a_1 \dots a_{n-1}(a_n-1)22\dots 2}$ – трійково раціональна точка. Розглянемо дві послідовності

$$x'_k = x_0 + \frac{1}{3^{n+k}} = \Delta_{a_1 \dots a_{n-1} a_n \underbrace{0\dots 0}_k(0)}, \quad x''_k = x_0 - \frac{1}{3^{n+k}} = \Delta_{a_1 \dots a_{n-1} (a_n-1) \underbrace{22\dots 2}_k(0)},$$

які прямують до x_0 . Для них

$$f(x'_k) - f(x_0) = \beta_1 p_0^{k-1} \left(\prod_{i=1}^n p_{a_i} \right) = p_0^k \left(\prod_{i=1}^n p_{a_i} \right);$$

$$f(x_0) - f(x_k'') = \sum_{j=2}^{+\infty} \left[\beta_{\alpha_{n+k+j}(x_0)} \left(\prod_{i=1}^{n-1} p_{a_i} \right) \cdot p_{a_{n-1}} \cdot p_2^{k+j-1} \right] =$$

$$= p_2^k p_{a_{n-1}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n-1} p_{a_i} \right) [\beta_2 + \beta_2 p_2 + \beta_2 p_2^2 + \dots] = p_2^k p_{a_{n-1}} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} p_{a_i}.$$

Звідки

$$A'_k = \frac{f(x_k') - f(x_0)}{x_k' - x_0} = 3^{n+k} p_0^k \prod_{i=1}^n p_{a_i} = (3p_0)^k (3p_{a_n}) \prod_{i=1}^{n-1} 3p_{a_i};$$

$$A''_k = \frac{f(x_0) - f(x_k'')}{x_0 - x_k''} = (3p_2)^k (3p_{a_{n-1}}) \prod_{i=1}^{n-1} 3p_{a_i}.$$

Зауважимо, що $c_1 = \prod_{j=1}^{n-1} 3p_{a_j} = \text{const}$, $c_2 = 3p_{a_n} \cdot c_1 = \text{const}$, $p_{a_n} p_{a_{n-1}} < 0$. Тоді

1) при $3p_0 > 1$ і $3p_2 > 1$ одна з послідовностей (A'_k) , (A''_k) прямує до ∞ , а інша до $-\infty$;

2) при $3p_i > 1$ і $3p_{2-i} < 1$ одна з послідовностей прямує до 0, а інша до $\pm\infty$;

3) якщо ж $3p_i = 1$, то $3p_{2-i} > 1$, а отже, одна з послідовностей (A'_k) , (A''_k) є сталою, а інша прямує до $\pm\infty$.

В усіх випадках $\lim_{k \rightarrow \infty} A'_k \neq \lim_{k \rightarrow \infty} A''_k$, що свідчить про те, що $f'(x_0)$ не існує. \square

Наслідок 6. Якщо $p_1 < -\frac{1}{3}$, а $p_0 = p_2$, то функція f є ніде не диференційовною.

1. Козырев С.Б. О топологической густоте извивающихся функций // Мат. заметки. – 1983. – Т. 33, № 1. – С. 71-76.
2. Панасенко О.Б. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 9. – С. 1225-1239.
3. Працевитий Н.В. Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. – К.: КГПИ, 1989. – С. 95-105.
4. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
5. Працьовитий М.В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційовної функції // Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2002. – № 3. – С. 351-362.
6. Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Динамічні системи: Пр. Укр. мат. конгр. – 2001. – К.: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 77-93.
7. Серпинський В. Элементарный примъръ возрастающей функции имъюющей почти всюду производную равную нулю // Мат. сб. – 1916. – Т. 30, вып. 3.
8. Турбин А.Ф., Працевитий Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наук. думка, 1992. – 208 с.
9. Albeverio S., Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equations. – 2007. – Vol. 15, no. 1. – P. 89-97.
10. Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory Dynam. Systems. – 2004. – Vol. 24, no. 1. – P. 1-16.

11. *Chatterji S.D.* Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. – 1963. – Vol. 38. – P. 325-331.
12. *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist. – 1971. – Vol. 42, № 2. – P. 1922-1929. – Те саме: Марсалья Дж. Случайные величины с независимыми двоичными цифрами // Кибернет. сб. – 1983. – Вып. 20. – С. 216-224.
13. *Minkowski H.* Gesammelte Abhandlungen. – Berlin, 1911. – Bd 2. – P. 50-51.
14. *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – Vol. 53, no. 3. – P. 427-439.
15. *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Monthly. – 1981. – Vol. 88, no. 1. – P. 47-49.

M. V. Pratsiovytyi, A. V. Kalashnikov

On a class of continuous functions with complicated local structure, most of which are singular or non-differentiable.

We consider finite-parameter family of functions consisting of singular, nowhere monotone and nowhere differentiable functions. We give the system of functional equations defining each of these functions in the class of bounded functions defined on $[0, 1]$. Integral, differential and fractal properties of the functions belonging to this family are studied.

Keywords: *singular function, nowhere monotone function, non-differentiable function, self-affine set, Hausdorff-Besicovitch, s-adic numeration system, fractal dimension preserving transformations.*

М. В. Працевитый, А. В. Калашников

Об одном классе непрерывных функций со сложным локальным строением, большинство из которых сингулярные или недифференцируемые.

Исследуется конечнопараметрическое семейство функций, которые являются либо сингулярными, либо извивающимися, в частности, нигде не дифференцируемыми. Указана система функциональных уравнений, определяющая каждую из таких функций в классе определенных и ограниченных на $[0, 1]$ функций. Изучаются интегральные, дифференциальные и фрактальные свойства функций данного семейства.

Ключевые слова: *сингулярная функция, извивающаяся функция, недифференцируемая функция, самоаффинное множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича, s-адическая система исчисления, преобразования, сохраняющие фрактальную размерность.*

Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова
prats4@yandex.ru
kalashnikov@bigmir.net

Получено 14.12.11

УДК 512.552+519.713

©2011. В. В. Скобелев

СВОЙСТВА ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ В АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

Систематически исследованы множества левых и правых делителей нуля в ассоциативных некоммутативных кольцах. Выделены два семейства множеств, определяемых, соответственно, левыми и правыми делителями нуля. Показано, что эти семейства множеств определяют два семейства, соответственно, правых и левых идеалов. Исследованы свойства этих семейств односторонних идеалов. Показано, что выделенные семейства множеств (а, следовательно, определяемые ими семейства односторонних идеалов) применимы для анализа структуры множества решений уравнений с параметрами, имеющими вид «произведение равно нулю», над ассоциативным некоммутативным кольцом.

Ключевые слова: ассоциативные некоммутативные кольца, левые и правые делители нуля, односторонние идеалы

1. Введение. В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция использования вычислений в кольцах вычетов в процессе решения задач преобразования информации, в частности, криптографии (см., напр., [1-3]). Эта тенденция стимулировала, с одной стороны, исследование автоматически-алгебраических моделей над конечными кольцами, а, с другой стороны, исследование теоретико-множественных и алгебраических свойств структуры колец с целью разработки математического аппарата, применимого для систематического анализа соответствующих автоматически-алгебраических моделей.

Исследование линейных и некоторых классов нелинейных автоматов над конечными ассоциативно-коммутативными кольцами с единицей [4, 5] показало, что при их использовании в качестве математических моделей дискретных преобразователей информации актуальным становится анализ сложности решения задач идентификации (параметрической и начального состояния), а также структуры множеств неподвижных точек автоматных отображений. Указанный анализ автоматически сводится к анализу сложности решения систем уравнений (как правило, нелинейных) с параметрами над соответствующим кольцом.

Известно, что поиск решения уравнения 2-й степени со многими переменными над полем $GF(2^k)$ является NP-полной проблемой. Ситуация еще более усложняется при решении уравнений с параметрами над кольцами с делителями нуля. Поэтому актуальной становится задача систематического исследования свойств делителей нуля в ассоциативных кольцах.

Целью настоящей работы и является систематическое исследование свойств делителей нуля в ассоциативных не обязательно коммутативных кольцах с целью разработки математического аппарата, применимого при решении уравнений с параметрами, имеющих вид «произведение равно нулю».

Все не определяемые в работе алгебраические понятия – такие же, как и в [6].

2. Основные понятия. Всяду под кольцом $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ ($|K| \geq 2$) понимается ассоциативное не обязательно коммутативное кольцо.

Известно, что $K = K^{inv} \cup K^{non-inv}$, где K^{inv} и $K^{non-inv}$ – множество, соответственно, обратимых и необратимых элементов кольца \mathcal{K} . Множество K^{inv} определяется следующим образом: $K^{inv} = \emptyset$, если \mathcal{K} – кольцо без единицы, и $K^{inv} = \{x \in K | (\exists x^{-1} \in K)(xx^{-1} = x^{-1}x = 1)\}$, если \mathcal{K} – кольцо с единицей. Отметим, что если \mathcal{K} – кольцо с единицей и $u \in K^{non-inv}$, то $u^l \neq 1$ для всех $l \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. В некоммутативном кольце \mathcal{K} с единицей определяются множество $K^{l-inv} = \{x \in K | (\exists a \in K)(ax = 1)\}$ обратимых слева элементов, а также множество $K^{r-inv} = \{x \in K | (\exists b \in K)(xb = 1)\}$ обратимых справа элементов. Ясно, что $K^{l-inv} \supseteq K^{inv}$ и $K^{r-inv} \supseteq K^{inv}$, причем не исключается, что одно или оба из этих включений могут быть строгими.

Таким образом, $K^{non-inv} = K \setminus K^{inv}$. Отметим, что $K^{non-inv} \neq \emptyset$ для любого кольца, так как $0 \in K^{non-inv}$.

В свою очередь, известно, что $K^{non-inv} = K^{ld} \cup K^{rd} \cup K^{non-d} \cup \{0\}$, где K^{ld} (соответственно, K^{rd}) есть множество левых (соответственно, правых) делителей нуля, а $K^{non-d} = K \setminus (K^{ld} \cup K^{rd} \cup \{0\})$.

Замечание 2. Если $ab = 0$ ($a, b \in K^{non-inv} \setminus \{0\}$), то элемент a называется левым делителем нуля, а элемент b – правым делителем нуля. В коммутативном кольце $K^{ld} = K^{rd} = K^d$, а элементы множества K^d называются делителями нуля.

Нетрудно убедиться в том, что для множеств K^{ld} и K^{rd} истинны следующие утверждения.

Утверждение 1. $K^{ld} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $K^{rd} \neq \emptyset$.

Утверждение 2. Если $x \in K^{ld}$, то $-x \in K^{ld}$, а если $y \in K^{rd}$, то $-y \in K^{rd}$.

Утверждение 3. Если $x \neq 0$, то $x \in K^{ld} \cap K^{rd}$ тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $a \in K^{ld}$ и $b \in K^{rd}$, что $ax = 0$ и $xb = 0$.

Утверждение 4. Для любого элемента $x \in K^{ld}$

$$ax \in \begin{cases} K^{ld}, & \text{если } a \in K^{inv} \cup K^{non-d} \\ K^{ld} \cup \{0\}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а для любого элемента $y \in K^{rd}$

$$ya \in \begin{cases} K^{rd}, & \text{если } a \in K^{inv} \cup K^{non-d} \\ K^{rd} \cup \{0\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из утверждения 4 вытекает, что истинны следующие три следствия.

Следствие 1. Если $x \in K^{ld} \setminus K^{rd}$ (соответственно, $y \in K^{rd} \setminus K^{ld}$), то $ax \in K^{ld}$ (соответственно, $yb \in K^{rd}$) для любого элемента $a \neq 0$ (соответственно, для любого элемента $b \neq 0$).

Следствие 2. $yx \in K^{ld} \cap K^{rd} \cup \{0\}$ для любых $x \in K^{ld}$ и $y \in K^{rd}$.

Следствие 3. Если $K^{ld} \neq \emptyset$ (или, что то же самое, $K^{rd} \neq \emptyset$), то равенство $K^{ld} \cap K^{rd} = \emptyset$ истинно тогда и только тогда, когда (K^{ld}, \cdot) и (K^{rd}, \cdot) – подполугруппы полугруппы (K, \cdot) .

Утверждение 5. Для любого подкольца $\mathcal{U} = (U, +, \cdot)$ кольца $\mathcal{K} = (K, +, \cdot)$ истинны равенства $K^{ld} \cap U = U^{ld}$ и $K^{rd} \cap U = U^{rd}$ (и, следовательно, если \mathcal{U} – коммутативное подкольцо кольца \mathcal{K} , то $K^{ld} \cap U = K^{rd} \cap U = U^d$).

Центром кольца \mathcal{K} называется множество K_{znttr} всех таких элементов $a \in K$, что $ax = xa$ для всех $x \in K$. Для любого кольца \mathcal{K} центр K_{znttr} – непустое множество (так как $0 \in K_{znttr}$), а $\mathcal{K}_{znttr} = (K_{znttr}, +, \cdot)$ – максимальное коммутативное подкольцо кольца \mathcal{K} .

Нетрудно убедиться в том, что истинны следующие утверждения, характеризующие множества K^{ld} и K^{rd} в терминах центра кольца.

Утверждение 6. Истинно равенство $K^{ld} \cap K_{znttr} = K^{rd} \cap K_{znttr}$.

Утверждение 7. $K^{ld} \subseteq K_{znttr}$ тогда и только тогда, когда $K^{rd} \subseteq K_{znttr}$.

Утверждение 8. Если $K^{ld} \subseteq K_{znttr}$ (или, что то же самое, $K^{rd} \subseteq K_{znttr}$), то $K^{ld} = K^{rd}$.

Нетрудно убедиться в том, что истинны следующие утверждения, характеризующие множества левых и правых делителей нуля в терминах гомоморфизмов колец.

Утверждение 9. Если φ – гомоморфизм кольца $\mathcal{K}_1 = (K_1, +_1, \cdot_1)$ в кольцо $\mathcal{K}_2 = (K_2, +_2, \cdot_2)$, то $\varphi(K_1^{ld}) \subseteq K_2^{ld} \cup \{0\}$ и $\varphi(K_1^{rd}) \subseteq K_2^{rd} \cup \{0\}$ (в частности, $\varphi(K^{ld}) \subseteq K^{ld} \cup \{0\}$ и $\varphi(K^{rd}) \subseteq K^{rd} \cup \{0\}$ для любого эндоморфизма φ кольца \mathcal{K}).

Утверждение 10. Если φ – изоморфизм кольца $\mathcal{K}_1 = (K_1, +_1, \cdot_1)$ в кольцо $\mathcal{K}_2 = (K_2, +_2, \cdot_2)$, то $\varphi(K_1^{ld}) \subseteq K_2^{ld}$ и $\varphi(K_1^{rd}) \subseteq K_2^{rd}$ (в частности, $\varphi(K^{ld}) \subseteq K^{ld}$ и $\varphi(K^{rd}) \subseteq K^{rd}$ для любого изоморфизма φ кольца \mathcal{K} в себя).

Утверждение 11. Если φ – автоморфизм кольца \mathcal{K} , то истинны равенства $\varphi(K^{ld}) = K^{ld}$ и $\varphi(K^{rd}) = K^{rd}$.

Говорят, что в полугруппе (G, \cdot) выполняется закон сокращения, если истинно следующее утверждение

$$(\forall a, b, c \in G)((ac = bc \Rightarrow a = b) \& (ca = cb \Rightarrow a = b)). \quad (1)$$

Известно, что полугруппа $(K^{inv} \cup K^{non-d}, \cdot)$ является максимальной подполугруппой полугруппы (K, \cdot) , удовлетворяющей закону сокращения (отсюда, в частности, вытекает, что для коммутативного кольца \mathcal{K} существует расширение $\tilde{\mathcal{K}}$, в котором каждый элемент множества K^{non-d} обратим). Таким образом, подмножество $K^{ld} \cup K^{rd} \subset K$ полностью характеризует все свойства, связанные с нарушением закона сокращения в кольце \mathcal{K} (и во всех его расширениях).

Замечание 3. Формула (1) определяет двусторонний закон сокращения. В некоммутативном кольце \mathcal{K} с единицей могут существовать такие обратимые слева элементы a , что $ax = ay \Rightarrow x = y$, но $xa = ya \not\Rightarrow x = y$, а также такие обратимые справа элементы b , что $xb = yb \Rightarrow x = y$, но $bx = by \not\Rightarrow x = y$. Таким образом, подмножество $K^{ld} \cup K^{rd} \subset K$ полностью характеризует все свойства, связанные с нарушением именно двустороннего закона сокращения в кольце \mathcal{K} .

Всюду в дальнейшем считаем, что $K^{ld} \neq \emptyset$ (и, следовательно, $K^{rd} \neq \emptyset$).

Множества K^{ld} и K^{rd} однозначно определяют в кольце \mathcal{K} системы непустых множеств

$$A_x^r = \{u \in K^{rd} | xu = 0\} \quad (x \in K^{ld}) \quad (2)$$

и

$$A_y^l = \{v \in K^{ld} | vy = 0\} \quad (y \in K^{rd}). \quad (3)$$

Из (2) и (3) непосредственно вытекает, что истинно следующее утверждение:

$$(\forall a, b \in K^{non-inv} \setminus \{0\})((ab = 0) \Leftrightarrow (a \in A_b^l) \& (b \in A_a^r)).$$

Отметим, что если \mathcal{K} – коммутативное кольцо, то $A_x^r = A_x^l = A_x$ ($x \in K^d$).

Семейства множеств (2) и (3) играют важную роль для решения уравнений вида «произведение равно нулю» над кольцом \mathcal{K} . Проиллюстрируем это обстоятельство следующим примером.

ПРИМЕР 1. 1. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_n \in K^{non-inv} \setminus \{0\}$ решение системы уравнений $a_i x = 0$ ($i = 1, \dots, n$) имеет вид $x \in \{0\} \cup \bigcap_{i=1}^n A_{a_i}^r$, а решение системы

уравнений $x a_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) имеет вид $x \in \{0\} \cup \bigcap_{i=1}^n A_{a_i}^l$.

2. Для любых $a \in K^{non-inv} \setminus \{0\}$ и $n \in \mathbb{N}$ решение уравнения $a x^n = 0$ имеет вид $x \in \{0\} \cup \{y \in K^{non-inv} | y^n \in A_a^r\}$, а решение уравнения $x^n a = 0$ имеет вид $x \in \{0\} \cup \{y \in K^{non-inv} | y^n \in A_a^l\}$.

3. Для любого $a \in K$ решение уравнения $x^2 + ax = 0$ имеет вид

$$x \in \{0, -a\} \cup \{b \in K^{non-inv} | (b + a \in K^{non-inv}) \& (b \in (A_b^l - a) \cap A_{b+a}^r)\},$$

а решение уравнения $x^2 + xa = 0$ имеет вид

$$x \in \{0, -a\} \cup \{b \in K^{non-inv} | (b + a \in K^{non-inv}) \& (b \in (A_b^r - a) \cap A_{b+a}^l)\}.$$

4. Решение уравнения $f_1(x)f_2(y) = 0$ имеет вид

$$(x, y) \in \{(a, b) \in K^2 | (f_1(a) = 0) \vee (f_2(b) = 0)\} \cup$$

$$\cup \{(a, b) \in K^2 | (f_1(a) \neq 0) \& (f_2(b) \neq 0) \& (f_1(a) \in A_{f_2(b)}^l) \& (f_2(b) \in A_{f_1(a)}^r)\}.$$

Рассмотренный пример показывает, что исследование теоретико-множественных и алгебраических свойств семейств множеств (2) и (3) имеет важное значение для анализа структуры множества решений уравнений с параметрами, имеющими вид «произведение равно нулю», над кольцом \mathcal{K} .

3. Свойства семейств множеств A_x^r ($x \in K^{ld}$) и A_y^l ($y \in K^{rd}$). Так как $\bigcup_{x \in K^{ld}} A_x^r = K^{rd}$ и $\bigcup_{y \in K^{rd}} A_y^l = K^{ld}$, то семейство множеств A_x^r ($x \in K^{ld}$) (соответственно, семейство множеств A_y^l ($y \in K^{rd}$)) представляет собой покрытие множества K^{rd}

(соответственно, множества K^{ld}) непустыми подмножествами. Соотношение между этими покрытиями устанавливает следующее утверждение.

Предложение 1. Для любого кольца \mathcal{K} истинны формулы

$$x \in \bigcap_{u \in A_x^r} A_u^l \quad (x \in K^{ld}), \quad (4)$$

$$y \in \bigcap_{v \in A_y^l} A_v^r \quad (y \in K^{rd}). \quad (5)$$

Доказательство. Из (2) вытекает, что истинна формула

$$(\forall x \in K^{ld})(\forall u \in A_x^r)(x \in A_u^l),$$

откуда следует, что истинна формула (4).

Аналогичным образом, из (3) вытекает, что истинна формула

$$(\forall y \in K^{rd})(\forall v \in A_y^l)(y \in A_v^r),$$

откуда следует, что истинна формула (5). \square

Назовем множество $I_x^r = A_x^r \cup \{0\}$ ($x \in K^{ld}$) правым аннулятором элемента x , а множество $I_y^l = A_y^l \cup \{0\}$ ($y \in K^{rd}$) – левым аннулятором элемента y .

Отметим, что если \mathcal{K} – коммутативное кольцо, то $I_x^r = I_x^l = I_x$ ($x \in K^d$), а множество I_x ($x \in K^d$) представляет собой аннулятор элемента x .

Предложение 2. Для любого кольца \mathcal{K} каждое множество I_x^r ($x \in K^{ld}$) является правым идеалом, а каждое множество I_y^l ($y \in K^{rd}$) – левым идеалом.

Доказательство. Для любого $x \in K^{ld}$ и для любых $a, b \in I_x^r$

$$x(a \pm b) = xa \pm xb = 0 \pm 0 = 0,$$

откуда вытекает, что $a \pm b \in I_x^r$. Следовательно, $(I_x^r, +)$ ($x \in K^{ld}$) – подгруппа аддитивной группы кольца \mathcal{K} .

Аналогичным образом, для любого $y \in K^{rd}$ и для любых $a, b \in I_y^l$

$$(a \pm b)y = ay \pm by = 0 \pm 0 = 0,$$

откуда вытекает, что $a \pm b \in I_y^l$. Следовательно, $(I_y^l, +)$ ($y \in K^{rd}$) – подгруппа аддитивной группы кольца \mathcal{K} .

Для любого $x \in K^{ld}$ и для любых $a \in I_x^r$ и $b \in K$

$$x(ab) = (xa)b = 0b = 0,$$

откуда вытекает, что $ab \in I_x^r$ для любых $a \in I_x^r$ и $b \in K$. Следовательно, каждое множество I_x^r ($x \in K^{ld}$) является правым идеалом кольца \mathcal{K} .

Аналогичным образом, для любого $y \in K^{rd}$ и для любых $a \in I_y^l$ и $b \in K$

$$(ba)y = b(ay) = b0 = 0,$$

откуда вытекает, что $ba \in I_y^l$ для любых $a \in I_y^l$ и $b \in K$. Следовательно, каждое множество I_y^l ($y \in K^{rd}$) является левым идеалом кольца \mathcal{K} . \square

Таким образом, в каждом кольце \mathcal{K} семейство множеств A_x^r ($x \in K^{ld}$) определяет семейство правых идеалов I_x^r ($x \in K^{ld}$), а семейство множеств A_y^l ($y \in K^{rd}$) – семейство левых идеалов I_y^l ($y \in K^{rd}$). Охарактеризуем эти семейства идеалов.

Предложение 3. В каждом кольце \mathcal{K} истинны равенства

$$I_{-x}^r = I_x^r \quad (x \in K^{ld}), \quad (6)$$

$$I_{-y}^l = I_y^l \quad (y \in K^{rd}). \quad (7)$$

Доказательство. Зафиксируем элемент $x \in K^{ld}$. Из утверждения 2 вытекает, что $-x \in K^{ld}$.

Пусть $a \in I_x^r$. Тогда $xa = 0$. Следовательно, $(-x)a = -xa = -0 = 0$, т.е. $a \in I_{-x}^r$. Итак, показано, что $I_x^r \subseteq I_{-x}^r$.

Пусть $a \in I_{-x}^r$. Тогда $(-x)a = 0$. Следовательно, $xa = -(-x)a = -0 = 0$, т.е. $a \in I_x^r$. Итак, показано, что $I_{-x}^r \subseteq I_x^r$.

Из включений $I_x^r \subseteq I_{-x}^r$ и $I_{-x}^r \subseteq I_x^r$ вытекает равенство (6).

Равенство (7) доказывается аналогично. \square

Предложение 4. В каждом кольце \mathcal{K} истинны включения

$$I_u^l \cap I_v^l \subseteq I_{u+v}^l \quad (u, v, u+v \in K^{rd}), \quad (8)$$

$$I_u^l \cap I_v^l \subseteq I_{u-v}^l \quad (u, v, u-v \in K^{rd}), \quad (9)$$

$$I_u^r \cap I_v^r \subseteq I_{u+v}^r \quad (u, v, u+v \in K^{ld}), \quad (10)$$

$$I_u^r \cap I_v^r \subseteq I_{u-v}^r \quad (u, v, u-v \in K^{ld}). \quad (11)$$

Доказательство. Зафиксируем элементы $u, v \in K^{rd}$. Пусть $a \in I_u^l \cap I_v^l$. Тогда $au = 0$ и $av = 0$. Следовательно,

$$a(u \pm v) = au \pm av = 0 \pm 0 = 0.$$

Отсюда вытекает, что если $u+v \in K^{rd}$, то $a \in I_{u+v}^l$, т.е. истинно включение (8), а если $u-v \in K^{rd}$, то $a \in I_{u-v}^l$, т.е. истинно включение (9).

Включения (10) и (11) доказываются аналогичным образом. \square

Произведением подмножеств X ($X \subseteq K$) и Y ($Y \subseteq K$) назовем множество XY , состоящее из всех таких конечных сумм $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ ($n \in \mathbb{N}$), что $x_i \in X$ и $y_i \in Y$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Предложение 5. В каждом кольце \mathcal{K} для любых элементов $x \in K^{ld}$ и $y \in K^{rd}$ множество $I_y^l I_x^r$ является двусторонним идеалом.

Доказательство. Так как $(I_x^r, +)$ ($x \in K^{ld}$) и $(I_y^l, +)$ ($y \in K^{rd}$) – подгруппы аддитивной группы кольца \mathcal{K} , то $(I_y^l I_x^r, +)$ также является подгруппой аддитивной группы кольца \mathcal{K} .

Пусть $u \in I_y^l I_x^r$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $u = \sum_{i=1}^n v_i w_i$, где $v_i \in I_y^l$ и $w_i \in I_x^r$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Так как множество I_y^l – левый идеал и $v_i \in I_y^l$ ($i = 1, \dots, n$), то $av_i = \alpha_i \in I_y^l$ ($i = 1, \dots, n$) для любого элемента $a \in K$. Следовательно,

$$au = a \sum_{i=1}^n v_i w_i = \sum_{i=1}^n (av_i) w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \in I_y^l I_x^r$$

для любого элемента $a \in K$, т.е. множество $I_y^l I_x^r$ – левый идеал.

Аналогичным образом доказывается, что множество $I_y^l I_x^r$ – правый идеал.

Так как множество $I_y^l I_x^r$ является как левым, так и правым идеалом, то оно является двусторонним идеалом кольца \mathcal{K} . \square

Элементы семейства I_y^l ($y \in K^{rd}$), а так же семейства I_x^r ($x \in K^{ld}$) могут не быть попарно различными, соответственно, левыми или правыми идеалами кольца \mathcal{K} . Проиллюстрируем это обстоятельство следующим примером.

Пример 2. Для кольца вычетов $\mathcal{Z}_{p^k} = (\mathbb{Z}_{p^k}, \oplus, \circ)$ (p – простое число, а $k \in \mathbb{N}$), которое, как известно, является коммутативным, множество $\mathbb{Z}_{p^k}^{inv}$ состоит из всех чисел $a \in \mathbb{Z}_{p^k} \setminus \{0\}$, взаимно-простых с числом p , а

$$\mathbb{Z}_{p^k}^d = \mathbb{Z}_{p^k} \setminus (\mathbb{Z}_{p^k}^{inv} \cup \{0\}) = \{ap^i | a \in \mathbb{Z}_{p^k}^{inv}; i = 1, \dots, k-1\}.$$

Множества A_{ap^i} ($a \in \mathbb{Z}_{p^k}^{inv}; i = 1, \dots, k-1$) имеют вид

$$A_{ap^i} = \{bp^j | b \in \mathbb{Z}_{p^k}^{inv}; j = k-i, \dots, k-1\}, \quad (12)$$

а идеалы $I_{ap^i} = A_{ap^i} \cup \{0\}$ ($a \in \mathbb{Z}_{p^k}^{inv}; i = 1, \dots, k-1$) определяют все собственные идеалы кольца \mathcal{Z}_{p^k} .

Из (12) вытекает, что $A_{a_1 p^i} = A_{a_2 p^i}$ ($i = 1, \dots, k-1$) для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_{p^k}^{inv}$ и, следовательно, $I_{a_1 p^i} = I_{a_2 p^i}$ ($i = 1, \dots, k-1$) для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_{p^k}^{inv}$.

Определив на множестве K^{ld} отношение эквивалентности \sim_l формулой

$$x_1 \sim_l x_2 \Leftrightarrow A_{x_1}^r = A_{x_2}^r \quad (x_1, x_2 \in K^{ld}),$$

и выбрав по одному представителю a из каждого класса фактор-множества K^{ld}/\sim_l , получим все попарно-различные правые идеалы I_a^r , принадлежащие семейству правых идеалов I_x^r ($x \in K^{ld}$). Аналогичным образом, определив на множестве K^{rd} отношение эквивалентности \sim_r формулой

$$y_1 \sim_r y_2 \Leftrightarrow A_{y_1}^l = A_{y_2}^l \quad (y_1, y_2 \in K^{rd}).$$

и выбрав по одному представителю b из каждого класса фактор-множества K^{rd}/\sim_r , получим все попарно-различные левые идеалы I_b^l , принадлежащие семейству левых идеалов I_y^l ($y \in K^{rd}$).

Известно, что в любом кольце \mathcal{K} для любого элемента $u \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ последовательность элементов

$$u, u^2, \dots, u^n, \dots$$

удовлетворяет в точности одному из следующих трех условий:

Условие 1. Все элементы u^n ($n \in \mathbb{N}$) попарно различны (что возможно только в бесконечном кольце \mathcal{K}).

Условие 2. Существует такое натуральное число $n_u \geq 2$, что u, \dots, u^{n_u-1} – попарно различные элементы множества $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ и $u^{n_u} = 0$ (т.е. u – нильпотентный элемент).

Условие 3. Существует такое натуральное число $l_u \geq 2$, что u, \dots, u^{l_u-1} – попарно различные элементы множества $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ и $u^{l_u} = u^i$ для некоторого числа $i \in \mathbb{N}_{l_u-1}$.

Теорема 1. В каждом кольце \mathcal{K} для любого элемента $u \in K^{ld} \cup K^{rd}$, если u, u^2, \dots, u^k ($k \geq 2$) – попарно различные элементы множества $\mathcal{K} \setminus \{0\}$, то истинны включения

$$I_u^r \subseteq I_{u^2}^r \subseteq \dots \subseteq I_{u^k}^r \quad (u \in K^{ld}), \quad (13)$$

$$I_u^l \subseteq I_{u^2}^l \subseteq \dots \subseteq I_{u^k}^l \quad (u \in K^{rd}). \quad (14)$$

Доказательство. Предположим, что $u \in K^{ld}$ и u, u^2, \dots, u^k ($k \geq 2$) – попарно различные элементы множества $\mathcal{K} \setminus \{0\}$.

Пусть $a \in I_{u^i}^r$ для некоторого $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Тогда $u^i a = 0$. Следовательно, $u^{i+1} a = u(u^i a) = u \cdot 0 = 0$, т.е. $a \in I_{u^{i+1}}^r$.

Итак, показано, что $I_{u^i}^r \subseteq I_{u^{i+1}}^r$ для всех $i = 1, \dots, k-1$. Отсюда вытекает, что включения (13) истинны.

Включения (14) доказываются аналогичным образом. \square

Для элементов множества $K^{ld} \cup K^{rd}$ ситуацию, определяемую условием 3, характеризует следующая теорема.

Теорема 2. В каждом кольце \mathcal{K} с единицей для любого элемента $u \in K^{ld} \cup K^{rd}$, если u, \dots, u^{l_u-1} ($l_u \geq 2$) – попарно различные элементы множества $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ и, кроме того, $u^{l_u} = u^i$ для некоторого числа $i \in \mathbb{N}_{l_u-1}$, то истинны формулы

$$u^i \in A_{u^{l_u-i-1}}^l \cap A_{u^{l_u-i-1}}^r, \quad (15)$$

$$u^{l_u-1} \in (A_{u^i}^l + 1) \cap (A_{u^i}^r + 1). \quad (16)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы.

Из равенства $u^{l_u} = u^i$ вытекает, что истинны равенства $u^i(u^{l_u-i} - 1) = 0$ и $(u^{l_u-i} - 1)u^i = 0$.

По условию теоремы $u^i \neq 0$. Кроме того, так как $u \in K^{non-inv}$, то $u^{l_u-i} \neq 1$, т.е. $u^{l_u-i} - 1 \neq 0$.

Следовательно, из равенства $u^i(u^{l_u-i} - 1) = 0$ вытекает, что $u^i \in A_{u^{l_u-i-1}}^l$ и $u^{l_u-1} \in A_{u^i}^r + 1$, а из равенства $(u^{l_u-i} - 1)u^i = 0$ вытекает, что $u^i \in A_{u^{l_u-i-1}}^r$ и $u^{l_u-1} \in A_{u^i}^l + 1$.

Из соотношений $u^i \in A_{u^{l_u-i-1}}^l$ и $u^i \in A_{u^{l_u-i-1}}^r$ вытекает, что истинна формула (15), а из соотношений $u^{l_u-1} \in A_{u^i}^r + 1$ и $u^{l_u-1} \in A_{u^i}^l + 1$ вытекает, что истинна формула (16). \square

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 4. В кольце \mathcal{K} с единицей для любого элемента $u \in K^{ld} \cup K^{rd}$, если u, \dots, u^{l_u-1} ($l_u \geq 2$) – попарно различные элементы множества $K \setminus \{0\}$ и, кроме того, $u^{l_u} = u^i$ для некоторого числа $i \in \mathbb{N}_{l_u-1}$, то истинны формулы

$$u^i \in (I_{u^{l_u-i-1}}^l \cap I_{u^{l_u-i-1}}^r) \setminus \{0\},$$

$$u^{l_u-1} \in ((I_{u^i}^l \setminus \{0\}) + 1) \cap ((I_{u^i}^r \setminus \{0\}) + 1).$$

4. Заключение. В настоящей работе исследованы теоретико-множественные и алгебраические свойства семейств левых и правых идеалов, построенных на основе семейств подмножеств, определяемых, соответственно, правыми и левыми делителями нуля в ассоциативных некоммутативных кольцах. Анализ свойств этих семейств односторонних идеалов, формулируемых в терминах структуры тех или иных классов ассоциативных некоммутативных колец, представляет возможное направление исследований. Другое направление связано с разработкой на основе построенного математического аппарата методов анализа структуры множества решений различных типов уравнений с параметрами, имеющими вид «произведение равно нулю», над конечными ассоциативными некоммутативными кольцами.

1. Алферов А.П., Zubov А.Ю., Кузьмин А.С. и др. Основы криптографии. – М.: Гелиос АРВ, 2002. – 480 с.
2. Харин Ю.С., Берник В.И., Матвеев Г.В. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. – Минск: Новое знание, 2003. – 382 с.
3. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. – М.: МЦМНО, 2003. – 328 с.
4. Скобелев В.В., Скобелев В.Г. Анализ шифрсистем. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2009. – 479 с.
5. Скобелев В.В., Глазунов Н.М., Скобелев В.Г. Многообразия над кольцами. Теория и приложения. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2009. – 323 с.
6. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М. Наука, 1973. – 400 с.

V. V. Skobelev

Properties of zero divisors in associative rings.

Sets of left and right divisors in associative non-commutative rings are examined systematically. There are extracted two families of sets determined via, correspondingly, left and right zero divisors. It is established that these families of sets determine two families of, correspondingly, left and right ideals.

Properties of these families of one-sided ideals are investigated. It is established that extracted families of sets (and, thus, determined families of one-sided ideals) can be applied into analysis the structure of the set of solutions for equations with parameters, of the form «some product is equal to zero», over associative non-commutative rings.

Keywords: *associative non-commutative rings, left and right zero divisors, one-sided ideals.*

В. В. Скобелєв

Властивості дільників нуля у асоціативних кільцях.

Систематично досліджено множини лівих та правих дільників нуля для асоціативних некомутативних кілець. Виділено дві сім'ї множин, які визначено, відповідно, лівими та правими дільниками нуля. Встановлено, що ці сім'ї множин визначають дві сім'ї множин, відповідно, правих та лівих ідеалів. Досліджено властивості цих сімей однобічних ідеалів. Встановлено, що виділені сім'ї множин (як наслідок, сім'ї однобічних ідеалів, які визначено цими сім'ями) може бути застосовано для аналізу структури множини розв'язків рівнянь з параметрами, які мають вигляд «добуток дорівнює нулю», над асоціативними некомутативними кільцями.

Ключові слова: *асоціативні некомутативні кільця, ліві та праві дільники нуля, однобічні ідеали.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vv_skobellev@iamm.ac.donetsk.ua*

Получено 30.12.11

УДК 519.5

©2011. Е. А. Татаринов

СЛОЖНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАФОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ КВАЗИКольЦАМИ И КВАЗИДЕРЕВЬЯМИ

Анализируются модификации алгоритма восстановления графа агентом, перемещающимся по его ребрам, считывающим и изменяющим метки на элементах графа. Найдены и исследованы операции над графами. Результирующий граф этих операций восстанавливается с использованием числа камней, выражающееся через сумму числа камней, необходимых для восстановления исходных компонент.

Ключевые слова: восстановление графов, агент, сложность алгоритма, блуждание по графу.

1. Введение. В настоящее время интенсивно развивается одно из направлений математической кибернетики – теория дискретных динамических систем [1-3]. В общей схеме Глушкова-Летичевского дискретная система представляется как модель взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата и операционной среды) [4]. Взаимодействие этих систем зачастую представляется как процесс перемещения управляющего автомата по графу (лабиринту) управляемой системы [1], что привело к обширной и интенсивно развивающейся области исследования поведения автоматов в лабиринтах [1-3].

Общая проблема анализа графа включает в себя ряд частных проблем, важнейшими из которых являются: проблема самолокализации, т.е. определения вершины графа, в которой первоначально находится автомат, проблему контроля графа (карты), т.е. проверки изоморфизма исследуемого графа и заданного графа – эталона (карты), и проблему полного восстановления графа. При этом автомат перемещается по дугам графа от вершины к вершине и воспринимает некоторую локальную информацию о нем и может отмечать элементы графа специальными метками (красками и / или камнями).

В данной работе рассматривается задача распознавания конечного, неориентированного графа, без петель и кратных ребер при помощи агента, который перемещается по нему и изменяет метки на вершинах и ребрах графа при помощи красок и камней [5].

Ранее в работе [6] проводился анализ временной сложности восстановления графа, полученного из нескольких графов путем применения к ним операций сочленения. Данная работа посвящена анализу числа камней, используемых для восстановления такого графа. При этом предполагается, что агент выполняет модификации алгоритма (далее будем обозначать его A) и три его эвристики, предложенные в [7], (далее будем называть их A_1 , A_2 , A_3 , соответственно), который является модификацией "Базового алгоритма" [8]. Найдены оценки числа камней, используемых для восстановления графов из классов квазикольца и квазидерева.

2. Необходимые определения и понятия. Рассматриваются конечные, неори-

ентированные графы без петель и кратных ребер. Все такие графы объединим в класс K . Все неопределяемые понятия общеизвестны и их можно найти, например, в [9-11]. Пусть $G = (V, E)$ – граф, у которого V – множество вершин, E – множество ребер, $E \subseteq V \times V$, мощности n и m , соответственно. Тройку $((u, v), v)$ будем называть инцидентором ("точкой прикосновения") ребра (u, v) и вершины v . Множество таких троек обозначим I . Множество $L = V \cup E \cup I$ назовем множеством элементов графа G . Окрестностью $O(v)$ вершины v будем называть множество элементов графа, состоящее из вершины v , всех вершин u смежных с v , всех ребер (v, u) и всех инциденторов $((v, u), v), ((v, u), u)$.

Последовательность u_1, u_2, \dots, u_k попарно смежных вершин, где все вершины различны, будем называть путем длины k в графе G . При $u_1 = u_k$ этот путь называется циклом. Краской будем называть ресурс, который имеется в неограниченном количестве, а камнем – ограниченный ресурс, все камни попарно различны и перенумерованы. Камень устанавливается в вершине и может быть снят с нее, а краской метят вершины и инциденторы ребер. Краска в отличие от камня может быть только заменена другой краской. При этом краска, на вершине в которой установлен камень, становится невидимой до тех пор, пока камень не будет снят.

Для каждого камня существует счетчик количества непомеченных ребер, которые есть в окрестности текущей вершины. Счетчик камня уменьшается на единицу, когда агент "видит" в окрестности текущей вершины вершину, помеченную этим камнем. После обнуления счетчика камня этот камень станет свободным, агент перейдет в вершину, снимет камень, вершину пометит краской b и возвращается обратно. Агент использует для установки в вершине свободный на данный момент камень наименьшим номером. С камнем ассоциируется M -номер [11], который неявно был присвоен вершине в момент установки в ней данного камня. Такая ассоциация сохраняется до тех пор, пока камень не станет свободным.

Пару (G, v) , где G – граф, а v – его вершина, назовем правильной, если удаление вершины v и всех инцидентных ей ребер не нарушает связности полученного графа G . То есть v не является точкой сочленения в смысле [12]. В противном случае пару назовем неправильной.

Сочленение двух графов [6] осуществляется отождествлением двух их вершин. В графах G_1 и G_2 выбираются соответственно вершины v_1, v_2 и отождествляются в одну вершину v . Если в результате отождествления образовались кратные ребра или петли, кратные ребра заменяются одним, а петли – удаляются из результирующего графа. Вершину v назовем вершиной сочленения. Сочленение графов G_1 и G_2 будем обозначать $G_1 \odot G_2$. Подграфы $G_1 \odot G_2$ изоморфные графам G_1 и G_2 будут компонентами сочленения.

Пусть задан класс $K' \subseteq K$, рассмотрим класс T^k графов, полученных из $G_1, \dots, G_k \in K'$ последовательным применением сочленения к G_1, \dots, G_k :

$$H_1 = G_1 \odot G_2;$$

$$H_2 = H_1 \odot G_3;$$

$$G = H_{k-1} \odot G_k.$$

Граф G назовем квазидеревом, если он не содержит простых циклов, которые

содержат одновременно вершины из G_i и G_j , $i \neq j$.

Пусть задан класс $K' \subseteq K$, рассмотрим класс S^k графов, полученных из $G_1, \dots, G_k \in K'$ последовательным применением операции сочленения к G_1, \dots, G_k и отождествлением двух вершин компонент G_1 и G_k :

$$H_1 = G_1 \odot G_2;$$

$H_2 = H_1 \odot G_3$, при этом в графе H_1 вершина для отождествления выбирается из компоненты G_2 ;

$H_{k-1} = H_{k-2} \odot G_k$, при этом в графе H_{k-2} вершина для отождествления выбирается из компоненты G_{k-1} ;

Результирующий граф G получается отождествлением $G_1 \odot G_k$. Будем называть квазиколичеством.

Связный ациклический граф, степень вершин которого не более двух, будем называть линией. Ясно, что степень один могут иметь только две его вершины, которые будем называть концами линии.

Будем говорить, что граф принадлежит классу M_c^p , если при его восстановлении агент использует p – камней и c – красок.

3. Постановка задачи. Пусть задан класс K графов: конечных, неориентированных, без петель и кратных ребер, – все элементы которых окрашены краской w . Задан агент, который может перемещаться по исследуемому графу из вершины по ребру, соединяющему их, и изменять метки на элементах графа так, как это было описано в пункте 2. Агент помещается в произвольную вершину априори неизвестного ему графа $G \in K$.

Агенту требуется восстановить граф G , т. е. построить граф H , изоморфный графу G , с точностью до меток на элементах графов.

4. Стратегия восстановления графа с использованием камней. Алгоритм A восстановления графа при помощи камней подробно описан в [7]. Алгоритм A основан на методе обхода графа в глубину [9, 10]. Этот метод модифицирован с учетом того, что агенту граф изначально неизвестен, агент может воспринимать локальную информацию о графе и агент строит на вершинах графа нумерацию в порядке посещения вершин (M – нумерация)[11]. Агент реализует нумерацию неявно, при помощи набора попарно различных камней.

В процессе обхода графа в глубину агент строит неявное дерево поиска в глубину, относительно которого ребра графа разбиваются на два множества: древесные и обратные. Древесные ребра проходятся два раза – в прямом (процедура $ВПЕРЕД(v)$) и обратном направлении (процедура $НАЗАД(v)$). При первом прохождении по древесному ребру оно восстанавливается в графе G и один из его инцидентов метится краской r . После перехода по ребру агент устанавливает в новой непометенной вершине свободный камень и восстанавливает все обратные ребра текущей вершины. Для восстановления обратных ребер агенту не требуется переходить по ним, поскольку, находясь в текущей вершине, помеченной некоторым камнем, он увидит камень, установленный в вершине, с которой смежно восстанавливаемое обратное ребро. Зная эти два камня, агент может однозначно определить ассоциируемые с ними неявные M -номера и восстановить обратное ребро. При установке в вершине

камня она добавляется в помеченный путь, при пометке ее краской b она удаляется из помеченного пути.

Алгоритм останавливается, когда помеченный путь становится пустым, а все вершины помечены краской b .

Данный алгоритм можно модифицировать с целью уменьшения количества камней, используемых при восстановлении графа или же сократить время анализа окрестности вершины.

Первая модификация, реализуется алгоритмом A_1 . Она заключается в том, что агент анализирует вершину, в которой собирается установить камень. Выделяется два вида вершин, для которых нет необходимости использовать камни: 1) вершины из которых не видно непомеченных вершин; 2) вершины, из которых видно только одну непомеченную вершину.

Вторая модификация реализуется алгоритмом A_2 . Она заключается в том, что для увеличения области восприятия агента, т. е. метятся камнями все вершины из окрестности текущей вершины. При этом часть камней будет освобождаться, так как за один шаг будет исследовано большее количество вершин.

Третья модификация реализуется алгоритмом A_3 . Она заключается в том, что камни, установленные в вершинах со степенью, большей чем D , не снимаются. D – заранее известная константа. При этом агент анализирует только вершины со степенью, меньше либо равной D .

5. Восстановление квазидеревьев и квазикольцев, полученных при помощи сочленения. Сформулируем результаты для алгоритма из [7], аналогичные результатам, полученным в [6]. А именно, покажем, что при восстановлении графов из классов T^k и S^k число камней, есть сумма числа камней используемых для восстановления его компонент.

Пусть G получен сочленением двух правильных пар. Покажем, что при восстановлении G агент либо сначала восстанавливает одну компоненту, а затем другую, либо восстанавливает часть первой компоненты, переходит в другую компоненту и не возвращается в первую до тех пор, пока вторая не будет полностью восстановлена.

Лемма 1. Пусть изначально агент помещается в вершину v графа $G \in K$ такую, что (G, v) – правильная пара. Тогда при выполнении агентом алгоритма $A, A_1 - A_3$, агент перейдет в вершину v после того, как восстановит все вершины графа G .

Доказательство. Доказательство от противного. Предположим, что агент восстановил часть графа G и вернулся в вершину v , при выполнении процедуры НАЗАД(v). При этом из вершины v агент может попасть в ранее не посещенные вершины. Так как (G, v) – правильная пара, то в силу связности $(G - v)$ из v существует путь в некоторую вершину u , которая смежна, хотя бы с одной из ранее посещенных вершин x , которая отлична от v . Это противоречит тому, что агент придерживается стратегии обхода графа в глубину. Поскольку при такой стратегии агент из вершины x перешел бы в вершину u , а не наоборот. Полученное противоречие доказывает лемму. \square

Теперь покажем, что число камней, используемых для восстановления графа G , будет равно сумме числа камней, используемых для восстановления каждой из его компонент.

Лемма 2. Пусть (G_1, v_1) и (G_2, v_2) – правильные пары и $G_1 \in M_2^{p_1}$, $G_2 \in M_2^{p_2}$, тогда G , полученный сочленением вершин v_1 и v_2 этих двух графов, принадлежит классу M_2^p , где $p = p_1 + p_2$.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные варианты начала выполнения агентом восстановления G . Пусть u_1 вершина сочленения G_1 и G_2 . Существует три различных начальных положения агента:

- 1) агент попал в вершину u_1 ;
- 2) агент попал в вершину $v_1 \in V(G_1) \setminus \{u_1\}$;
- 3) агент попал в вершину $v_2 \in V(G_2) \setminus \{u_1\}$.

Рассмотрим эти случаи.

1. Агент метит вершину u_1 камнем номер 1 и добавляет ее в помеченный путь. После чего он начинает восстанавливать компоненту G_1 , используя камни, учтенные при подсчете p_1 . После этого агент, либо попадет в вершину $v'_1 \in V(G_1) \setminus \{u_1\}$, либо в вершину $v'_2 \in V(G_2) \setminus \{u_1\}$. Предположим, что он попал в v'_1 (v'_2). Далее агент будет восстанавливать вершины графа G и ребра G_1 (G_2). Так как (G_1, v_1) ((G_2, v_2)) правильная пара, то по лемме 1 агент не уйдет из компоненты G_1 (G_2), пока полностью ее не восстановит. При этом он будет использовать камни, которые были учтены при подсчете p_1 (p_2). Следовательно, агенту потребуется $p_1 + p_2$ камней.

2. Агент пометит вершину v_1 камнем номер 1 и добавит в помеченный путь. После чего он начинает восстанавливать вершины и ребра компоненты G_1 . В этом случае существует два различных варианта дальнейшего выполнения алгоритма.

2.1. Агент восстановит полностью компоненту G_1 , используя при этом p_1 камней, и только после этого попадет в вершину сочленения u_1 , пометит ее камнем, который уже был учтен при подсчете p_2 . После чего он восстановит все вершины и ребра компоненты с G_2 , используя камни, учтенные при подсчете p_2 . Следовательно, агенту потребуется $p_1 + p_2$ камня.

2.2. Агент восстановит часть компоненты G_1 , используя при этом p_1 камней. После чего он попадет в вершину сочленения u_1 , пометит ее камнем i . После чего агент переходит в компоненту G_2 . Так как (G_2, v_2) правильная пара, то по лемме 1 он полностью его восстанавливает, используя p_2 камней. При этом камень номер i уже был учтен при подсчете p_1 . Даже если этот камень будет не свободным при восстановлении компоненты G_2 , то это не увеличит число камней p_2 , которые агент использует для ее восстановления. После восстановления компоненты G_2 агент возвращается в u_1 и восстанавливает оставшуюся часть G_1 , используя p_1 камней. Следовательно, агенту потребуется $p_1 + p_2$ камней.

3. Этот случай полностью аналогичен случаю 2. Воспользуемся рассуждениями из пункта 2. \square

Леммы 1, 2 обобщим на случай сочленения k правильных пар.

Теорема 1. Если граф G получен последовательным отождествлением в одну

вершин v_1, \dots, v_k правильных пар $(G_1, v_1), \dots, (G_k, v_k)$, где $G_i \in M_2^{p_i}$, $i = 1, \dots, k$, то $G \in M_2^p$, где $p = \sum_{i=1}^k p_i$. При этом порядок восстановления компонент не имеет значения.

Доказательство. Пусть v вершина сочленения всех правильных пар. Если агент помещен в вершину v , то он, согласно лемме 1, перейдет в эту вершину v только после того, как полностью восстановит одну из компонент. Следовательно, агент начнет последовательно восстанавливать компоненты G_i , используя p_i камней, где $i = 1, \dots, k$. Тогда согласно лемме 2 $G \in M_2^p$, где $p = \sum_{i=1}^k p_i$ вне зависимости от порядка восстановления компонент.

Если же агент будет помещен в компоненту G_j , в вершину отличную от вершины v , то возможны два варианта выполнения агентом восстановления графа: 1) агент полностью восстановит компоненту G_j и переходит в вершину сочленения v ; 2) агент восстанавливает часть компоненты G_j , переходит в вершину сочленения v , а из нее в вершину v_i компоненты G_i и $i \neq j$.

1. В этом случае агент из вершины сочленения v переходит в вершину v_i компоненты G_i и $i \neq j$. Поскольку все компоненты правильные, то согласно лемме 1 агент не перейдет в вершину сочленения v при выполнении процедуры НАЗАД(v) до тех пор, пока он не восстановит все ребра и вершины компоненты G_j . После чего он при выполнении процедуры НАЗАД(v) переходит в вершину сочленения v , а из нее в следующую не восстановленную компоненту. Следовательно, агент последовательно восстановит компоненты G_i , где $i = 1, \dots, k$ и $i \neq j$, а $G \in M_2^p$, где $p = \sum_{i=1}^k p_i$ вне зависимости от порядка восстановления компонент.

2. В этом случае агент из вершины сочленения v переходит в вершину v_i компоненты G_i и $i \neq j$. Поскольку все компоненты правильные, то согласно лемме 1 агент не перейдет в вершину сочленения v при выполнении процедуры НАЗАД(v) до тех пор, пока он не восстановит все ребра и вершины компоненты G_j . После чего он при выполнении процедуры НАЗАД(v) переходит в вершину сочленения v . Далее агент либо возвращается в компоненту G_j , либо переходит в следующую не восстановленную компоненту. В первом случае агент восстановит оставшуюся часть компоненты G_j (по лемме 1 в силу того, что G_j правильная компонента). Во втором случае, агент восстановит полностью еще одну компоненту. Следовательно, агент восстановит часть компоненты G_j , затем некоторое число компонент G_i , после чего восстановит оставшуюся часть компоненты G_j , а затем – оставшиеся компоненты G_i , где $i = 1, \dots, k$ и $i \neq j$, а $G \in M_2^p$, где $p = \sum_{i=1}^k p_i$ вне зависимости от порядка восстановления компонент. \square

Следствие 1. Граф G , полученный сочленением двух графов G_1 и G_2 , где $G_1 \in M_2^{p_1}$ и $G_2 \in M_2^{p_2}$, принадлежит классу M_2^p , где $p = p_1 + p_2$ при выполнении агентом алгоритмов A , $A_1 - A_3$.

Любой граф G_i $i = 1, 2$, можно представить в виде сочленения правильных пар $(v_1, G_i^1), \dots, (v_{k_i}, G_i^{k_i})$, где G_i^j $j = 1, \dots, k_i$ подграфы графа G_i . Тогда G будет сочленением правильных пар компонент G_1 и G_2 . Из теоремы 1 получаем справедливость следствия.

Следствие 2. Пусть $G \in T^k$ получен последовательным сочленением G_1, \dots, G_k , где $G_j \in M_2^{p_j}$, $j = 1, \dots, k$. Тогда $G \in M_2^p$ где $p = \sum_{i=1}^k p_i$. При этом p_j определяются выполняемым агентом алгоритмом $A, A_1 - A_3$.

Докажем следствие 2 методом математической индукции.

При $k = 1$. В этом случае $G = G_1$, соответственно $p = p_1$ и следствие справедливо.

Пусть при $k = j$ следствие справедливо, тогда $p = \sum_{i=1}^k p_i$.

Покажем, что при $k = j + 1$ выполняется $p = \sum_{i=1}^k p_i$. Поскольку в этом случае результирующий граф получается путем сочленения графа G' , полученного j последовательными сочленениями графов G_1, \dots, G_j , и графа G_{j+1} , то для них справедливо следствие 1, тогда $p = \sum_{i=1}^k p_i$.

Доказанные выше утверждения показывают, что число камней используемых при восстановлении графа с агентом, выполняющим алгоритмы $A, A_1 - A_3$, определяется формулой $p = \sum_{j=1}^k p_j$, где p_j – число камней, используемых для восстановления компоненты G_j .

Другим классом графов, у которых число камней есть функцией числа камней компонент, является класс квазиколец.

При восстановлении графа $G \in S^k$, для простоты рассуждений, будем предполагать, что агент начинает восстановление из вершины компоненты G_1 .

Теорема 2. Пусть $G \in S^k$ получен последовательным сочленением G_1, \dots, G_k , где $G_j \in M_2^{p_j}$, $j = 1, \dots, k$. тогда $G \in M_2^p$ где $p = \sum_{i=1}^k p_i + p_1$. При этом p_j определяются выполняемым агентом алгоритмом $A, A_1 - A_3$,

Доказательство. Для графа $G' \in T^k$ выполняется следствие 2, тогда $G' \in M_2^p$, где $p = \sum_{j=1}^k p_j$. Однако, в силу того, что G_1 и G_k сочленяются, то агент может пройти по всем G_j , где $j = 1, \dots, k$, так что все $\sum_{j=1}^k p_j$ будут заняты, и после того, как он перейдет из вершин компоненты G_k в вершину сочленения u_{k-1} , метит камнем номер i , который был учтен при подсчете p_k , после этого агент переходит в вершину компоненты G_1 . Поскольку камень номер i может остаться не свободным, то для восстановления оставшейся части вершин компоненты G_1 агенту потребуется дополнительно не менее p_1 камней, так как из вершины сочленения u_{k-1} агент может попасть в компоненты G_1 , в которой агент до этого еще не был. Следовательно, всего потребуется не более $\sum_{j=1}^k p_j + p_1$ камней. \square

Доказанные выше утверждения показывают, что число камней, используемых при восстановлении графа агентом, выполняющим A, A_1, A_2 , определяется формулой $\sum_{i=1}^k p_i + p_1$.

6. Восстановление квазидеревьев и квазиколец, полученных соединением компонент мостом. Рассмотрим сочленение двух графов G_1 и G_2 , когда их вершины v_1 и v_2 не отождествляются в одну, а соединяются ребром. Такое ребро является мостом в смысле [12]. Мы будем рассматривать соединение двух графов не только одним ребром (мостом), но и соединением двух графов линией. В этом случае будем говорить, что графы соединены мостом длины l , где l – количество вершин в линии. Ясно, что при соединении графов G_1 и G_2 мостом длины l происходит

сочленение линии длины l с графами G_1 и G_2 . При этом один конец линии v отождествляется с вершиной v_1 графа G_1 , а второй конец линии u отождествляется с вершиной v_2 графа G_2 . При этом, если один из соединяемых графов был получен соединением двух других графов при помощи моста, то при его сочленении с мостом может быть выбрана любая вершина. Т.е. конец моста может сочленяться с вершиной, которая принадлежала мосту при его построении. Следовательно, если при построении квазидеревьев и квазикольцев заменить операцию сочленения на операцию соединения через мост некоторой длины l , то получим квазикольца и квазидеревья, для которых будут справедливы аналогичные леммы следствия и теоремы. Сформулируем результаты, аналогичные следствиям 1 и 2 и теоремам 1 и 2, для случая, когда операция сочленения заменяется операцией соединения графов мостом длины l .

Лемма 3. *При выполнении агентом алгоритмов A, A_2 на графе G вида линия агент использует не более трех различных камней и две различные краски, т.е. $G \in M_2^3$.*

Доказательство. Рассмотрим худший случай, когда агент попадает в вершину, не являющуюся концом линии. Тогда, согласно алгоритму, в ней он установит камень номер 1, и перейдет в соседнюю вершину, и установит в ней камень номер 2, после чего перейдет в соседнюю вершину и пометит ее камнем номер 3, и при этом камень номер 2 станет свободным, а вершину агент пометит краской b . После перехода в соседнюю, не помеченную вершину, агент пометит ее камнем 2, при этом камень номер 3 станет свободным, а вершину агент пометит b . И так далее, чередуя использование камней номер 2 и номер 3, агент дойдет до конца линии, а потом вернется в начальную вершину, и так же, чередуя использование камней номер 2 и 3, дойдет до другого конца линии и тем самым восстановит граф с использованием только трех красок. \square

Лемма 4. *При выполнении агентом алгоритма A_1 на графе G агент использует один камень и две различные краски, т.е. $G \in M_2^1$.*

Доказательство. Воспользуемся рассуждениями леммы 3, заметив, что вершины, которые агент метит камнями номер 2 и номер 3, будут вершинами, из которых будет видно только одну не помеченную вершину. Следовательно, агенту не потребуются камни для их пометки, а только один камень для пометки начальной вершины. \square

Лемма 5. *Пусть агент выполняет алгоритмы A, A_1, A_2 , на графе G , который является деревом, у которого i вершин имеют степень больше двух. Тогда $G \in M_2^p$, где $p = i + 3$ для A, A_2 и $p = p + 1$ для A_1 .*

Доказательство. Для простоты рассуждений будем предполагать, что такое дерево получается из графа вида линия путем его сочленения с i графами l_j вида линия $j = 1, \dots, i$. Наихудшим случаем является случай, когда длины этих линий больше трех и они сочленяются путем отождествления их вершин с разными вершинами исходного графа, поскольку, при этом установленные в них камни не освобождаются сразу после установки. Согласно лемме 3 при выполнении агентом A агент использует

ет три различных камня для восстановления исходной линии. Согласно лемме 4 при выполнении агентом эвристики A_1 агент использует один камень для восстановления исходной линии l . Согласно лемме 4 при выполнении агентом эвристики A_2 агент использует три различных камня для восстановления исходной линии. Во всех трех случаях камни используются повторно. Повторное использование камней обуславливается тем, что они либо освобождаются, либо вершины относятся к вершинам специального вида (эвристика A_1). В полученном графе будет i вершин, которые не будут принадлежать к вершинам особого вида, камни, установленные в них, не будут сразу освобождаться. Для восстановления вершин линий l_j $j = 1, \dots, i$ агент будет использовать камни, которые использовались при восстановлении исходной линии l , и на момент начала восстановления добавленной линии l_j $j = 1, \dots, i$ стали свободны. Таким образом, в i вершинах появятся камни, которые не освободятся сразу же после установки. Для A , A_1 камни не будут освобождаться, поскольку степень вершины будет больше двух. То есть, после перехода в следующую вершину в окрестности предыдущей остается одна не посещенная вершина и камень не освобождается. В случае выполнения эвристики A_2 при пометке 1— окрестности вершины степени больше двух в силу тех же причин один камень останется не свободным. Следовательно, агенту потребуется i дополнительных камней для всех трех случаев. \square

Теорема 3. Пусть $G \in T^k$, а $G_j \in M_2^{p_j}$, где $j = 1, \dots, k$ и вместо операции сочленения используется операция соединения графов при помощи моста. Тогда $G \in M_2^p$, при выполнении агентом алгоритмов A , A_2 $p = \sum_{j=1}^k p_j + p_1 + (k - 2) + 4$, а при выполнении алгоритма A_1 $p = \sum_{j=1}^k p_j + p_1 + (k - 2) + 2$.

Доказательство. В данном случае граф G получен сочленением компонент G_j $j = 1, \dots, k$ и $k - 1$ мостов, которые могут образовывать деревья. В худшем случае будет образовано одно дерево с $k - 2$ вершинами степени больше двух или же будет образовано большее количество деревьев, но количество вершин в них степени больше двух не превзойдет $k - 2$. Следовательно, по лемме 5 для восстановления такого или каждого из таких деревьев с i вершинами степени больше двух потребует дополнительно камней $i + 3$ при выполнении агентом A , A_2 и $i + 3$ камня при выполнении агентом A_1 . При этом дополнительные камни, которые используются для восстановления вершин степени меньше трех будут использоваться повторно. При этом, если агент изначально помещается в вершину, принадлежащую одному из мостов, то в начале восстановления один камень останется не свободным, а остальные камни, будут повторно использоваться при восстановлении вершин степени меньше трех. Так как, по следствию 2, верхняя оценка числа камней, используемых агентом, будет равна сумме верхних оценок всех компонент. Тогда, всего агенту потребуется при выполнении алгоритмов A , A_2 $p = \sum_{j=1}^k p_j + p_1 + (k - 2) + 3 + 1$ камней, а при выполнении алгоритмов A_1 $p = \sum_{j=1}^k p_j + p_1 + (k - 2) + 1 + 1$ камней. \square

Теорема 4. При выполнении агентом алгоритмов A , A_1 , A_2 на $G \in S^k$, где $G_j \in M_2^{p_j}$, $G \in M_2^p$, где $j = 1, \dots, k$ и вместо операции сочленения используется операция соединения графов при помощи моста. Тогда $G \in M_2^p$, при выполнении

агентом A , $A_2 - p = \sum_{j=1}^k p_j + p_1 + (k-2) + 4$, а при $A_1 - p = \sum_{j=1}^k p_j + p_1 + (k-2) + 2$.

Доказательство. В данном случае граф G получен сочленением компонент G_j $j = 1, \dots, k$ и $k - 1$ мостов, которые могут образовывать деревья. В худшем случае будет образовано одно дерево с $k - 2$ вершинами степени больше двух или же будет образовано большее количество деревьев, но количество вершин в них степени больше двух не превзойдет $k - 2$. Следовательно, по лемме 5 для восстановления такого или каждого из таких деревьев с i вершинами степени больше двух потребуется дополнительно камней $i + 3$ при выполнении агентом A , A_2 , а для $A_1 - i + 1$ камней, при этом дополнительные камни, которые используются для восстановления вершин степени меньше трех будут использоваться повторно. При этом, если агент изначально помещается в вершину, принадлежащую одному из мостов, то в начале восстановления один камень останется не свободным, а остальные камни, будут повторно использоваться при восстановлении вершин степень меньше трех. Так как, по теореме 2 верхняя оценка числа камней, используемых агентом, будет равна сумме верхних оценок всех компонент и дополнительно числа камней, используемых для восстановления начальной компоненты. Тогда, всего агенту потребуется при выполнении алгоритмов A , A_2 $p = \sum_{j=1}^k p_j + p_1 + (k - 2) + 3 + 1$ камней, а при выполнении алгоритма $A_1 - p = \sum_{j=1}^k p_j + p_1 + (k - 2) + 1 + 1$ камней. \square

Доказанные выше утверждения обобщают результаты, полученные для операции сочленения.

7. Выводы. Найдены оценки числа камней, используемых для восстановления графов из классов квазикольца и квазидеревья. Для квазидеревьев число камней используемых агентом, выражается через сумму числа камней, используемых для восстановления компонент. Для квазикольца число камней, используемых агентом, – через сумму числа камней, используемых для восстановления компонент и дополнительного числа камней, используемых для восстановления компоненты, из которой агент начал восстановления графа.

Результаты, полученные для классов T^k S^k , обобщаются для случая, когда сочленение заменяется соединением двух графов мостом. Для операции соединения двух графов мостом получены результаты, аналогичные результатам для операции сочленения.

1. Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Уичумлич Ш. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15, вып. 3. – С. 3–40.
2. Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Уичумлич Ш. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 2003. – Т. 15, вып. 2. – С. 3–39.
3. Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Уичумлич Ш. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. – 1992. – Т. 4, вып. 3. – С. 3–28.
4. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. – М: Наука, 1985, – 320 с.
5. Dudek G., Jenkin M. Computational principles of mobile robotic // Cambridge Univ. Press. – 2000. – 280 p.
6. Татаринов Е.А. Базовый алгоритм восстановления графа // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 21. – С. 492–497.
7. Татаринов Е.А. Восстановление графа при помощи камней // Збірник наукових праць "Пи-

- танья прикладної математики і математичного моделювання". – Дніпропетровськ: Вид. Дніпр. нац. ун-та. – 2011. – С. 232-255.
8. Грунський І.С., Татаринов Е.А. Распознавание конечного графа блуждающим по нему агентом // Вестник Донецкого университета. Серия А. Естественные науки. – 2009. – Вып. 1. – С. 492-497.
 9. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.
 10. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2001. – 960 с.
 11. Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ – Петербург, 2003. – 1104 с.
 12. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.

Е. А. Tatarinov

Basic algorithm for reconstructing a finite graph.

The modifications of the reconstruction a graph algorithm by agent moving moving through his edges, read and modify marks on the elements of the graph are analyzed. Found and research operations on graphs. The resulting graph of these operations is reconstructed with the use of stone, which is the sum of the number of stones needed to reconstruct the original components.

Keywords: *graph reconstruction, agent, complexity of the algorithm, move on graph.*

Є. О. Татаринов

Складність відновлення графів, що є квазікільцями і квазідеревами.

Аналізуються модифікації алгоритму відновлення графа агентом, що переміщається по його ребрах, що зчитує і змінює мітки на елементах графа. Знайдено та досліджено операції над графами. Результуючий граф цих операцій відновлюється з використанням числа каменів, що виражається через суму числа каменів, необхідних для відновлення вихідних компонент.

Ключові слова: *відновлення графів, агент, складність алгоритму, блукання по графу.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
MDgerelo@yandex.ru

Получено 02.12.11

УДК 517.5

©2011. Н. В. Феценко

АНАЛОГИ ПРОБЛЕМЫ ЗАЛЬЦМАНА В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В работе рассматривается аналог проблемы Зальцмана для n -мерного симплекса. Полностью разобран случай, когда функция имеет нулевой интеграл по всем симплексам, которые касаются данного внутренним образом. С помощью доказанного результата доказана теорема о полноте некоторой системы функций в L_p , получен новый результат о гомеоморфизмах с N -свойством Лузина.

Ключевые слова: Проблема Зальцмана, функции, интегрируемые по Лебегу, линейный функционал, теорема Хана-Банаха, теорема Рисса, гомеоморфизмы.

1. Введение. В данной работе рассматриваются аналогии и приложения следующей проблемы, поставленной Л. Зальцманом, которая в свою очередь является актуальной в современной интегральной геометрии.

Пусть S – замкнутый единичный квадрат, ∂S – его граница и $S^0 = S \setminus \partial S$. Обозначим через $S(z)$ наибольший замкнутый квадрат в S с центром в точке z из S^0 . Для каждого $z \in S^0$ пусть $S_\alpha(z)$ – квадрат, гомотетичный $S(z)$ с центром гомотетии z и линейным коэффициентом α , где $0 < \alpha \leq 1$. Верно ли, что $f \equiv 0$, если f – непрерывная функция на S такая, что интеграл от f над $S_\alpha(z)$ равняется нулю для всех z из S^0 ?

Зальцман показал, что ответ на этот вопрос утвердительный, в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = 1/3$. Berenstein в обзорной работе [1] о проблеме Помпейю интересовался случаем $\alpha = 1/2$, но не разобрал его. Thompson и Schonbek [2] ответили на этот вопрос положительным ответом для всех $\alpha = \frac{n}{n+2}$, где n – положительное целое число и, в частности, для $\alpha = 1/3$ и $\alpha = 1/2$. Позднее Thompson [3] обобщил этот результат для всех $\alpha \in [\frac{3}{4}; 1)$.

В работе [5] автором был изучен аналог проблемы Зальцмана для правильного треугольника на плоскости и правильного тетраэдра в пространстве. Доказан аналог результата Зальцмана для квадрата при $\alpha = 1$ в обоих случаях, а также некоторый аналог теоремы Томпсона и Шонбека для дискретного множества параметров α в случае правильного треугольника.

В данной работе изучается аналог проблемы Зальцмана для симплекса в n -мерном пространстве. Доказан аналог результата Зальцмана для квадрата при $\alpha = 1$, который обобщает результаты для треугольника и тетраэдра из [5]. Кроме того, рассматриваются приложения полученных результатов в теории приближений и теории отображений с сохранением меры.

2. Аналог проблемы Зальцмана в для n -мерного симплекса. Рассмотрим n -мерное пространство \mathbb{R}^n . Выберем в нем набор из $n + 1$ точек A_0, A_1, \dots, A_n ,

Автор выражает благодарность Волчкову В.В. за постановку проблемы и внимание к работе.

не лежащих в одной $n - 1$ -мерной гиперплоскости. Замкнутая выпуклая оболочка этих точек называется n -мерным симплексом (или просто симплексом) с вершинами A_0, A_1, \dots, A_n .

Введем некоторые определения, связанные с симплексами. Пусть T – это некоторый фиксированный n -мерный симплекс с вершинами A_0, A_1, \dots, A_n . Центром симплекса T будем называть его центр масс, то есть точку

$$C := \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_n}{n + 1}.$$

Гранью симплекса, противоположащей вершине A_j , будем называть выпуклую оболочку G_j всех остальных вершин. Это будет $n - 1$ -мерный симплекс, лежащий в гиперплоскости, порожденной вершинами $A_0, \dots, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n$.

Пусть C – это центр симплекса и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Обозначим через ${}^\alpha T$ симплекс с вершинами $B_j := C + \alpha(A_j - C)$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Фактически этот симплекс получается из T гомотетией с центром в C с коэффициентом α . Будем называть симплекс \tilde{T} похожим на T , если $\tilde{T} = B + {}^\alpha T$ для некоторой точки $B \in \mathbb{R}^n$ и некоторого $\alpha > 0$.

Пусть T – некоторый фиксированный n -мерный симплекс, ∂T – его граница и $\text{int}(T) := T \setminus \partial T$ – его внутренность. Для точки $A \in \text{int}(T)$ обозначим через $T(A)$ наибольший замкнутый симплекс с центром в точке A , лежащий в T и похожий на T .

Теорема 1. Пусть $f \in L(T)$ и

$$\int_{T(A)} f(x) dx = 0, \quad A \in \text{int}(T). \tag{1}$$

Тогда $f = 0$.

Доказательство. Пусть T^j – симплекс с вершинами $A_0, \dots, A_{j-1}, C, A_j, \dots, A_n$. Очевидно, что $T = T^0 \cup T^1 \cup \dots \cup T^n$. Поэтому достаточно доказать, что $f = 0$ на каждом из симплексов T^j . Рассмотрим для определенности симплекс T^0 . Для остальных симплексов T^j доказательство будет аналогичным. Обозначим $\vec{v}_j := A_j - A_0$. Введем следующее обозначение

$$P^0 := P(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) := \{t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_n \vec{v}_n : 0 \leq t_1, t_2, \dots, t_n \leq 1\}.$$

То есть, P^0 – это n -мерный параллелепипед, натянутый на вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 пусть $A \in \text{int}(T^0)$ и $\alpha > 0$ такое, что параллелепипед $P := A + \alpha P^0$ целиком лежит в $\text{int}(T^0)$. Тогда $\int_P f(x) dx = 0$.

Доказательство леммы 1. Для произвольного множества

$$S \subseteq I_n := \{1, 2, \dots, n\}$$

обозначим

$$A_S := A + \alpha \sum_{j \in S} \vec{v}_j.$$

Ясно, что множество точек $\{A_S\}_{S \subset I_n}$ составляет множество всех вершин параллелепипеда P . Далее обозначим через T_S симплекс, похожий на T , одной из вершин которого является A_S , а остальные n вершин лежат в грани G_0 . Ясно, что для каждой точки A_S такой симплекс единственный, и он имеет вид $T(C_S)$ для некоторой точки $C_S \in \text{int}(T^0)$. Поэтому по условию теоремы 1

$$\int_{T_S} f(x) dx = 0.$$

Обозначим для удобства $T_j := T_{\{j\}}$ и $T_0 := T_\emptyset$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\bigcap_{j \in S} T_j = T_S, \quad S \subset I_n,$$

где по определению $\bigcap_{j \in \emptyset} T_j := T_0$ и

$$P = T_0 \setminus \bigcup_{j=1}^n T_j.$$

Поэтому по формуле включений-исключений в интегральной форме имеем

$$\begin{aligned} \int_P f(x) dx &= \int_{T_0 \setminus \bigcup_{j=1}^n T_j} f(x) dx \\ &= \sum_{S \subset I_n} (-1)^{|S|} \int_{\bigcap_{j \in S} T_j} f(x) dx = \sum_{S \subset I_n} (-1)^{|S|} \int_{T_S} f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

в силу (1). Лемма доказана. \square

Вернемся к доказательству теоремы.

Пусть $A \in \text{int}(T^0)$ и U – некоторая окрестность точки A , целиком лежащая в $\text{int}(T^0)$. Пусть $R := [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$ – произвольный прямоугольный параллелепипед, некоторый сдвиг которого целиком лежит в U . Рассмотрим функцию

$$F(x) := \int_{x+R} f(u) du = \int_R f(x+u) du,$$

при тех значениях x , для которых $x+R \subset U$. Так как некоторый сдвиг R целиком лежит в U , то функция F определена на некотором непустом открытом множестве. По свойствам интеграла Лебега функция F непрерывна.

Пусть точка $B \in \text{int}(T^0)$ такая, что $Q := B + R \subset U$. Тогда при достаточно малых $\alpha > 0$ выполнено включение $P_\alpha + R \subset U$, где $P_\alpha := B + \alpha P^0$. Значит, по теореме Фубини и лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \int_{P_\alpha} F(x) dx &= \int_{P_\alpha} dx \int_R f(x+u) du \\ &= \int_R du \int_{P_\alpha} f(x+u) dx = \int_R du \int_{u+B+\alpha P^0} f(x) dx = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

в силу (1).

Так как F – непрерывная функция, то по теореме о среднем для любого рассматриваемого α найдется точка $B_\alpha \in P_\alpha$ такая, что

$$\int_{P_\alpha} F(x) dx = F(B_\alpha) \mu(P_\alpha),$$

где $\mu(\Omega)$ – это n -мерная мера Лебега множества Ω .

Откуда в силу (2) следует, что $F(B_\alpha) = 0$. Так как $\text{diam} P_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $B \in P_\alpha$ при всех α , то $B_\alpha \rightarrow B$ при $\alpha \rightarrow 0$. Поэтому

$$F(B) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(B_\alpha) = 0.$$

Таким образом, доказано, что

$$\int_Q f(u) du = 0$$

для любого прямоугольного параллелепипеда Q со сторонами, параллельными осям координат, лежащего в U .

Отсюда из общих свойств меры и интеграла Лебега следует, что $f = 0$ п.в. в U . А так как A – произвольная точка из $\text{int}(T^0)$, то $f = 0$ п.в. в T^0 . С учетом замечаний в начале доказательства получаем, что теорема доказана. \square

3. Полнота некоторой системы функций в L_p .

Теорема 2. Система функций $\{\chi_{T(A)}\}_{A \in \text{int}(T)}$, где

$$\chi_{T(A)}(w) = \begin{cases} 1, & w \in T(A), \\ 0, & w \notin T(A), \end{cases}$$

является замкнутой в $L_p(T)$ при $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. По следствию из теоремы Хана-Банаха утверждение теоремы 2 эквивалентно следующему: для любой функции φ , линейной и непрерывной на $L_p(T)$, из условия $\langle \varphi, \chi_{T(A)} \rangle = 0$, $A \in \text{int}(T)$, следует, что $\varphi = 0$.

По теореме Рисса об общем виде линейного функционала

$$\langle \varphi, g \rangle = \int_T g(x)h(x)dx,$$

где $h \in L^q(T)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$.

Так как

$$0 = \langle \varphi, \chi_{T(A)} \rangle = \int_T \chi_{T(A)}(x)h(x)dx = \int_{T(A)} h(x)dx,$$

то

$$\int_{T(A)} h(x)dx = 0, \quad A \in T.$$

Поскольку $h \in L^q(T) \subset L^1(T)$, то из теоремы 1 следует, что $h = 0$. Поэтому $\varphi = 0$. \square

4. О гомеоморфизмах с N -свойством Лузина.

Теорема 3. Пусть $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм с N -свойством Лузина и

$$\mu(f(T(A))) = \mu(T(A)), \quad A \in \text{int}(T),$$

где μ – мера Лебега в \mathbb{R}^n .

Тогда $\mu(f(E)) = \mu(E)$ для любого измеримого множества $E \subseteq T$.

Доказательство. Рассмотрим функцию множеств $\nu(E) := \mu(f(E))$. Так как f – гомеоморфизм, то f – инъективное отображение. Поэтому ν является мерой. По N -свойству [4, с. 231] мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ . Значит, по теореме Радона-Никодима найдется такая функция $w \in L(T)$, что для любого измеримого множества E

$$\mu(f(E)) = \int_E w(x)dx.$$

Так как $\mu(E) = \int_E 1 dx$, то по условию теоремы

$$0 = \mu(f(T(A))) - \mu(T(A)) = \int_{T(A)} (w(x) - 1)dx, \quad A \in T.$$

Из теоремы 1 теперь следует, что $w(x) = 1$ п.в. на E относительно μ . Поэтому $\mu(f(E)) = \mu(E)$ для любого измеримого множества $E \subseteq T$. \square

1. Berenstein C. A. El problema de Pompeiu // Atas do Novo Coloquio Brasileiro de Matematica, Pocos de Caldas. – 1973. – Vol. 1 – P. 31-37.
2. Thompson K. W. and Schonbek T. A Problem of Pompeiu Type // American Mathematical Monthly. – 1980. – No. 87. – P. 32-36.

3. *Thompson K. W.* Additional results of Zalcman's Pompeiu problem // *Aequationes Mathematicae.* – 1992. – No. 44. – P. 42-47.
4. *Натансон И. П.* Теория функций действительного переменного. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
5. *Фещенко Н. В.* Аналоги проблеми Зальцмана и их применение // *Труды ИПММ НАН Украины.* – 2010. – Т. 20. – С. 177-187.

N. V. Feschenko

Analogues of Zalcman's problem in n -dimensional space and their applications.

We consider an analogue of Zalcman's problem for n -dimensional simplex. The case, when function has zero integral over all simplexes, which is tangent to given one by inner way, is fully analyzed. By means of proved result theorem on completeness of some system of functions in L_p are proved, some result on homeomorphisms with Lusin's N -property is obtained.

Keywords: *Zalcman's problem, Lebesgue integrable functions, linear functional, Hahn-Banach theorem, Riesz theorem, homeomorphisms.*

Н. В. Фещенко

Аналоги проблеми Зальцмана в n -вимірному просторі та їх застосування.

У роботі розглядається аналог проблеми Зальцмана для n -вимірного симплекса. Повністю розібрано випадок, коли функція має нульовий інтеграл по всіх симплексах, що дотикаються даного внутрішнім чином. За допомогою доведеного результату доведено теорему про повноту деякої системи функцій в L_p , здобуто новий результат про гомеоморфізми з N -властивістю Лузіна.

Ключові слова: *Проблема Зальцмана, функції, інтегровані за Лебегом, лінійний функціонал, теорема Хана-Банаха, теорема Рісса, гомеоморфізми.*

Донецкий национальный ун-т
natalyafeschenko@mail.ru

Получено 24.11.11