УДК 517.946+532.546

С. Г. Суворов

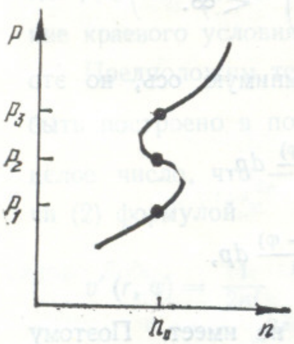
ФИЛЬТРАЦИЯ С РЕТРОГРАДНЫМИ ЯВЛЕНИЯМИ

Выводится удобная для исследования форма уравнения фильтрации при наличии ретроградной конденсации. Доказывается существование решения соответствующей начально-краевой задачи при малой интенсивности ретроградной конденсации. Указываются условия принципиальной непредсказуемости (в деталях) конечного результата при интенсивной ретроградной конденсации.

Ретроградные явления — типичная ситуация для смеси веществ, находящейся вблизи критической точки. Например, смесь газов при постоянной температуре (в термостате) расширяется и в какой-то момент из нее выпадает жидкий конденсат — явление ретроградной конденсации. При дальнейшем понижении давления жидкость опять испаряется — обычное испарение.

Схематично соответствующий участок изотермы в координатах (p — давление; n — плотность) можно изобразить многозначной функцией $p = p(n)$ (рисунок). Точка p_3 лежит на участке обычного (предретроградного) расширения; p_2 — на участке ретроградности; p_1 — на участке обычного (постретроградного) расширения.

Объяснение ретроградных явлений через ударный резонанс (и вообще, видимо, первое) см. в [1].



В статье делается попытка изучения фильтрации смеси газов в условиях ретроградной конденсации, т. е. в условиях, в каких находятся газоконденсатные месторождения. Статья состоит из трех частей: первая (вывод уравнений) и третья (интерпретация результатов) написаны на «физическом уровне строгости»; вторая (исследование задачи в обобщенной постановке) на «математическом».

1. Имея заданное уравнение состояния

$$p = p(n, T), \tag{1}$$

описывающее ретроградные явления, имея закон фильтрации Дарси (в пренебрежении массовыми силами)

$$\mathbf{w} = -\frac{k}{\mu}\nabla p \tag{2}$$

и уравнение неразрывности

$$mn_t + \operatorname{div} n\mathbf{w} = mq\,(d - f(n)), \tag{3}$$

выпишем (формально) уравнение фильтрации

$$n_t - \alpha \operatorname{div} np'(n) \nabla n = q(d - f(n)). \tag{4}$$

Здесь k, μ, m — для простоты постоянные проницаемость, вязкость и пористость соответственно; $\alpha = \frac{k}{m\mu} > 0$; $p(n)$ — функция из (1) при фиксированной температуре T. Подробности можно найти в [5].

Технически проще исследовать случай нулевого начального условия

$$n(0, x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}(0) \subset \mathbb{R}^3, \tag{5}$$

в связи с чем предполагаем, что газ закачивается под определенным давлением в первоначально пустой пласт, и правая часть в (4) описывает какую-то конкретную реализацию «закачивающих скважин».

Задача обычно осложняется тем, что (4) можно рассматривать только в полости, занятой газом, который (в нашей ситуации) вытесняет воду, т. е. нецилиндрической по времени области. На постоянных частях границы задаются условия непроницаемости

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0, \tag{6}$$

ν — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, а на подвижных — условие Веригина: если вся интересующая нас область $\Omega = \{x, t\colon x \in R^3, t \in R^+, \psi(x, t) > 0\}$, то это (в случае идеального газа)

$$\operatorname{const}(\nabla_x p, \nabla_x \psi) = \psi_t. \tag{7}$$

В нашем случае здесь возникает иное условие (см. п. 3). Здесь будет рассмотрена только «усеченная» постановка, при которой функция ψ априори задана.

Уравнение (4) преобразуем, перейдя от плотности к некоторому аналогу функции Лейбензона [5]: $u = \mathcal{P}(n_0) = \int_0^{n_0} np'(n)\,dn$. Формально преобразовывая, имеем $\mathcal{P}(n_0) = \int_0^{n_0} \frac{n\,dn}{n'(p)} = \int_0^{p} n(p)\,dp$. Последнее выражение, как видно из рисунка, является многозначной функцией: при $n = n_0$ (в дальнейшем индекс «ноль» не пишется) получаются три значения, соответствующие верхним пределам p_1, p_2, p_3. Обратная к этой многозначной функции функция $n = \varphi(u)$ однозначная, с волной $\varphi'(u)$ меняет знак как раз при заходе в область ретроградных явлений.

Уравнение для u будет иметь вид

$$[\varphi(u)]_t - \alpha\Delta u = q[d - f(\varphi^{-1}(u))]. \tag{8}$$

Так как на практике функции f и φ по характеру поведения близки, то для упрощения заменим $f(\varphi^{-1}(u))$ на u.

Если волна на рисунке не глубока, то функция

$$b(u) = \int_0^1 \tau\varphi'(\tau u)\,d\tau \equiv \frac{1}{u^2}\int_0^u \xi\varphi'(\xi)\,d\xi \equiv \frac{\varphi(u)}{u} - \frac{1}{u^2}\int_0^u \varphi(\xi)\,d\xi \tag{9}$$

неотрицательна.

При этом предположим, что при весьма малых и больших u функция $\varphi(u) = \operatorname{const}\cdot u$ с подходящей константой, например, $\varphi(u) = u$ — опять с целью избавиться от больших сложностей, не связанных с ретроградными явлениями. Это предположение нарушает физичность картины (реально при малых u, например, $\varphi(u) \sim \sqrt{u}$, кроме того, здесь опущена волна обычного фазового превращения, которая расположена ниже ретроградной области), но в интересующей нас области поведение u остается качественно тем, каким должно быть. Функция $b(u)$ при таком предположении обрезается константами при малых и больших u, хотя может менять знак, если глубока изображенная на рисунке волна.

2. Потребуем, чтобы область $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ была ограничена и чтобы $\mathrm{mes}_{n+1}(\partial\Omega) = 0$ (здесь и далее $x \in \mathbf{R}^n$, $(x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$). Считаем, что $\bar{\Omega} \subset \{(x, t) : 0 \leqslant t \leqslant \mathcal{T}\}$ и множества $\Omega(t_0) \equiv \Omega \cap \{(x, t) : t = t_0\}$ не пусты для всех $t_0 \in (0, \mathcal{T})$. Аналогично определяем $\bar{\Omega}(t_0) \equiv \bar{\Omega} \cap \{(x, t) : t = t_0\}$, $t_0 \in [0, \mathcal{T}]$.

Введем на пространстве $C^\infty(\bar{\Omega})$ скалярное произведение

$$(u, v) = \iint_\Omega [(\nabla_x u, \nabla_x h) + uh]\, dxdt \tag{10}$$

и определим пространства: 1) E — как пополнение $C^\infty(\bar{\Omega})$ в норме $\| u \|_E = (u, u)^{1/2}$; 2) E^* — как пространство, сопряженное с E в L_2-двойственности $\langle w, h \rangle = \iint_\Omega whdxdt$ или изометрично как пополнение $C^\infty(\bar{\Omega})$ в норме $\{\| w \|_{E^*} = \sup \langle w, h \rangle : h \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \| h \|_E = 1\}$.

Записывая в дальнейшем интегралы на пополнениях, понимаем их как пределы интегралов на классах эквивалентных последовательностей из $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Пространство X определено как пополнение $C^\infty(\bar{\Omega})$ в норме $\| u \|_X^2 = \| u \|_E^2 + \| u_t \|_{E^*}^2$, после чего на X задается билинейная форма $\mathcal{B}(u, h) = \iint_\Omega (u_t h - uh_t)\, dxdt$. Если $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ — множество u, для которых $\mathcal{B}(u, h)$ может быть по непрерывности продолжена на все $h \in E$, то, очевидно, определен линейный оператор $B^0 : \mathcal{D}(\mathcal{B}) \to E^*$, $\langle B^0 u, h \rangle = \mathcal{B}(u, h)$.

Наконец, X_0 — пополнение $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ в норме графика $\| u \|_{X_0}^2 = \| u \|_E^2 + \| B^0 u \|_{E^*}^2$; E_0 — замыкание X_0 в норме $\| \cdot \|_E$, E_0^* — сопряженное к E_0 в L_2 — двойственности. Вводя оператор тождественного вложения $j : E_0 \to E$, можем определить $B_0 = j^* B^0 j : \mathcal{D}(B_0) \subset E_0 \to E_0^*$, причем $j\mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(\mathcal{B})$.

Полезно отметить случаи совпадения E_0 с E и, хотя это не обязательно, в дальнейшем такое совпадение предполагаем для упрощения.

Теорема 1. Если $\Omega = \{(x, t) : \psi(x, t) > 0\}$, где $\psi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ — функция класса C^n с ненулевым полным градиентом $\nabla_{x,t}\psi$ всюду на $\partial\Omega$, то $E_0 = E$. Это же верно для поверхности, состоящей из конечного или счетного числа таких частей, если места их соединения лежат на $\{(x, t): t = t_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$. Построения этого раздела до сих пор повторяли [8], но дальше — различаются.

На $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ задаем нелинейный оператор $B : \mathcal{D}(\mathcal{B}) \to E^*$ по формуле $\langle B(u), h \rangle = \iint_\Omega b(u)(u_t h - uh_t)\, dxdt$. При изучении групповых свойств (8) аналогичная форма вводилась в [7]. Обозначим также $U_\tau = \{u \in E : \| B(u) \|_{E^*} \leqslant \tau\}$.

Лемма 1. В любой области U_t оператор B является псевдомонотонным, радиально непрерывным и неотрицательным.

С помощью леммы Цорна и построений, аналогичных лемме 1.2 [3, с. 326], доказывается

Лемма 2. Оператор B допускает максимальное псевдомонотонное, радиально непрерывное, неотрицательное расширение $B_m : X_m \to E^*$ с линейной областью определения X_m.

Пусть $A : E \to E^*$ — непрерывный, ограниченный, сильно монотонный (не обязательно линейный) оператор, частным случаем которого является эллиптическая часть (8) в обобщенной постановке, с условием $f \bigcirc \varphi^{-1} = I$:

$$\langle A(u), h \rangle = \iint [\alpha(\nabla_x u, \nabla_x h) + quh]\, dxdt. \tag{11}$$

(При $E \neq E_0$ операторы A, B потребовалось бы заменить на j^*Aj, j^*Bj.) Пусть теперь $\Lambda(u, h) = \langle Au, h \rangle + \langle B_m u, h \rangle$ и тогда, если $f \in E_m^*$, то обобщенная форма задачи, которая здесь исследуется, задается уравнением

$$\Lambda(u, h) = \langle f, h\rangle \quad \forall h \in E. \tag{12}$$

Теорема 2. Задача (12) разрешима в X_m.

Доказательство здесь получается несложной переработкой теоремы 2.3 [2, с. 98].

3. Сначала выясним, во что превращается задача (12), если $\partial\Omega$ кусочно-гладкая, $f \in L_2$ и решение u достаточно гладкое, а затем попробуем разобраться в физических причинах полученного ответа. Для простоты опять считаем, что оператор A задан формой (11), а $f = qd$.

Будем рассматривать решения (12), достаточно гладкие за исключением, возможно, тех точек, где u проходит через значения u_-, u_+, обращающие $\varphi'(u)$ в ноль; $\partial\Omega$ предполагаем кусочно-гладкой, $f \in L_2$. Можно доказать, что на $h \in X_0 \cap X$ форма $\langle B_m u, h\rangle = \iint\limits_{\Omega} b(u)(u_t h - u h_t)\,dxdt$ в указанном выше предельном смысле, если $b \neq 0$ всюду. Теперь, выбирая в качестве пробных h из (12) функции $h \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем после переброски производных $(2b + ub'_u)u_t - \alpha\Delta u + qu = qd$, а с учетом (9) — уравнение $[\varphi(u)]_t - \alpha\Delta u + qu = qd$, т. е. (8).

Предположим теперь, что $M = (x_0, t_0)$ — некоторая невырожденная точка границы, т. е. $\nabla_x\psi(x_0, t_0) \neq 0$ (все время считаем $\Omega = \{\psi > 0\}$). Взяв пробные $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$, отличные от нуля только в малой окрестности M, используя формулу (1.15) [6, с. 18], легко выводим граничное условие $(\alpha\nabla_x u, \nabla_x\psi) = b(u)\,u\,\psi_t$. Но так как $\nabla_x u = n\nabla_x p$ (разумеется, при допустимости перехода к многозначной функции p), $b(u)\,u = n - \frac{1}{u}\int\limits_0^u n du$, то это условие перепишется в виде

$$\alpha(\nabla_x p, \nabla_x\psi) = \frac{n - \frac{1}{u}\int n du}{n}\psi_t. \tag{13}$$

В классическом случае идеального газа правая часть (13) превращается в $\frac{1}{3}\psi_t$, а на неподвижных участках границы (уже в общей ситуации) получается условие (6).

Чтобы выяснить, какие условия возникают на вырожденных участках границы, которые обозначим $M_i = \{x, t_i\}$, в частности, на верхних и нижних крышках области, надо аналогично [8] взять $h = \beta_{\varepsilon,i}(t)\,u$, где $\beta_{\varepsilon,i} \equiv 1$ вне 2ε-окрестности $U_{2\varepsilon,i}$ точки t_i, равна 0 в ε-окрестности $U_{\varepsilon,i}$ и линейна в промежутке. При этом на M_i возникает условие

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[-\int\limits_{U_{2\varepsilon,i}\setminus U_{\varepsilon,i}}\int\limits_{\Omega(t)} b(u)\,u^2\beta'_{\varepsilon,i}\,dxdt\Big] \geqslant 0. \tag{14}$$

Если $b(u)$ всюду положительна (мелкая волна ретроградности на рисунке), то из (14) следуют совершенно естественные условия. Например, для начального $t = 0$ и конечного $t = \mathscr{T}$ моментов выводим $-\int\limits_{\overline{\Omega}(0)} bu^2 dx \geqslant 0 \Rightarrow u|_{t=0} = 0$ и, соответственно, $\int\limits_{\overline{\Omega}(\mathscr{T})} bu^2 dx \geqslant 0$ — отсутствие условий при $t = \mathscr{T}$. Аналогично — на всех нижних или верхних крышках области (напомню, что она не цилиндрическая).

При этом решение однозначно определяется начальными условиями (вместе с граничными, конечно) и аналогичными условиями на всех нижних крышках. Например, если область представляет собой узкий стоящий цилиндр (ось Ot направлена вверх), на который поставлен широкий цилиндр, то начальные условия задаются при $t = 0$ и дополнительно на той части дна широкого цилиндра, которая не совпадает с узким. Решение определяется этими данными, несмотря на его (возможную) ломку в точках $\varphi'(u) = 0$.

Здесь видно отличие этих результатов от теории Фикеры [4], вызванное именно функциональным, а не пространственно-временным вырождением $\varphi'(u)$: тип условий (начальное или конечное) зависит не от знаков $\varphi'(u)$, а от знака $b(u)$. В то же время линейность временного члена в (8) и при нелинейной эллиптической части приводит к результатам типа Фикеры, см. [8].

Дальнейшие рассуждения переходят на «физический уровень строгости».

Если волна ретроградности глубока, то в процессе движения u от $u = 0$ к максимальному функция $b(u)$ меняет (на какое-то время) знак. (Для простоты предположим сейчас, что решение не зависит от x, что достигается условием $q = \text{const}$ и постоянством области.)

При остановке в момент $\mathcal{T}$, если он пришел на $b < 0$, из (14) следует необходимость задать условие и на верхней крышке $t = \mathcal{T}$. Условие это будет нулевое (это вызвано изначальной постановкой и совершенно неестественно), а решение u может рваться при $b = 0$, что тоже неестественно. Видимо, введением ненулевого конечного условия — это достигается обычной заменой $u \to u - v$ с подходящей функцией v — можно добиться непрерывности решения. Но тогда конечное состояние $u(\mathcal{T})$ неизвестно — по начальным условиям оно не определяется корректно.

Если физичность использованной нами задачи (12) может вызывать сомнения из-за условия (13), то в цилиндрических (по времени) областях оно полностью физична. Следовательно, указанному явлению должно быть физическое объяснение. Попытаемся его сформулировать.

Уравнение состояния (1) формально записано в интенсивных переменных, т. е. не зависящих от общего количества вещества. Но на самом деле глубина волны ретроградности — величина экстенсивная, т. е. зависит от количества веществ. Дело в том, что глубина волны характеризуется интенсивностью резонансного испарения (если принять убедительные объяснения ретроградности в [1]), т. е. характеризуется отношением площади поверхности жидкой фазы к объему. (Вообще-то, зависимость здесь более сложная из-за мелкодисперсности жидкой фазы).

Уравнение (1) — это равновесное уравнение, полученное усреднением по некоторому «стандартному объему». Но чем детальнее мы хотим изучить поведение смеси газов, тем меньше надо брать этот объем — глубина волны растет и, начиная с какого-то радиуса r_0 «стандартного объема», функция $b(u)$ становится знакопеременной. В такой детализации, следовательно, результаты ретроградной конденсации непредсказуемы, во всяком случае, корректно.

Это хорошо согласуется с экспериментами, в которых невозможно предсказать детальную картину возникающих центров конденсации и т. д., но можно предсказать среднее количество конденсата, выпавшего в «не очень малом» объеме.

1. *Васильев Ю. Н.* Использование ударного резонанса при разработке газоконденсатных месторождений // Технология эксплуатации газоконденсатных месторождений севера Тюменской области.— М. : ВНИИГАЗ, 1987.— С. 115—121.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 588 с.
4. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формулой // Итоги науки. Мат. анализ, 1969.— 1971.— С. 5—252.
5. *Подземная* гидравлика / К. С. Басниев, А. М. Власов, И. Н. Кочина, В. М. Максимов.— М. : Недра, 1986.— 304 с.
6. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1966.— 444 с.
7. *Солодяк М. Т., Третьяк В. И.* Вариационная формулировка и законы сохранения для одного нелинейного уравнения параболического типа // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1983.— 17.— С. 85—87.
8. *Суворов С. Г.* Нелинейные параболические уравнения в общих нецилиндрических областях // Нелинейн. граничн. задачи. —1990.— Вып. 2.— С. 205—209.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 25.10.89