УДК 517.946

П. П. Забрейко, Л. Э. Нехамкин

ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ИЗ $\mathbb{R}^{n+1}$ В $\mathbb{R}^n$ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа содержит описание теории вращения отображений единичного индекса. Для каждого $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, определенного на замыкании ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и невырожденного на $\dot{\Omega}$, определено вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ со значением в группе Z_2. В отличие от вращения отображений нулевого индекса, нормирующим для такого вращения является не единичное отображение, а надстройка над отображением Хопфа. Введенное вращение обладает рядом свойств обычного вращения. Приведены некоторые теоремы о вычислении индекса изолированной особой точки отображения единичного индекса. Указаны классы бесконечномерных отображений, на которые удается перенести излагаемую теорию. В качестве приложения рассмотрена задача о бифуркации системы нелинейных уравнений единичного индекса; приведена также теорема существования решения для некоторого класса операторных уравнений.

Известна роль топологических методов при исследовании различных конечных систем нелинейных уравнений — знание топологических инвариантов отображений, порождаемых левыми частями этих систем, позволяет устанавливать число их решений, исследовать свойства устойчивости этих решений, возможность их приближенного построения тем или иным численным методом и др. Однако большая часть известных в настоящее время результатов относится к случаю, когда число уравнений n совпадает с числом неизвестных m. Именно для этого случая (см., например, [1—3]) ответы на все перечисленные выше и многие другие вопросы можно дать с помощью единственной топологической характеристики — вращения векторного поля на границе области. Эта характеристика представляет собой целочисленную функцию $\gamma(\Phi, \Omega)$, определенную для каждого непрерывного векторного поля (отображения) $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ область определения которого содержит замыкание ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и которое не обращается в нуль на границе этой области. Эта функция однозначно определяется следующими своими тремя свойствами:

1) $\gamma(I(x_0), \Omega) = 1$ при $x_0 \in \Omega$; здесь $I(x_0)x = x - x_0$ (свойство **невырожденности**);

2) $\gamma(\Phi, \Omega_1 \cup \Omega_2) = \gamma(\Phi, \Omega_1) + \gamma(\Phi, \Omega_2)$, если Φ не обращается в нуль на $\Omega_1 \subset \Omega_2$ (свойство **аддитивности**);

3) $\gamma(\Phi_0, \Omega) = \gamma(\Phi_1, \Omega)$, если поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны на Ω, т. е. существует отображение $\Phi(\cdot, \cdot): [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, для которого $\Phi(0, \cdot) = \Phi_0$, $\Phi(1, \cdot) = \Phi_1$ и $\Phi(\lambda, \cdot)$ не обращается в нуль на границе $\dot{\Omega}$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (свойство **гомотопности**).

Естественно возникает вопрос о том, сохраняется ли подобная ситуация для случая, когда число уравнений n в рассматриваемой системе оказывается отличным от числа неизвестных m в этой системе, т. е. для векторных полей из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. При этом формулировка свойства 1 должна быть изменена ($I(x_0)$ не является отображением из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ при $m = n$), например, следующим образом: $\gamma(JI(x_0), \Omega) = 1$ при $x_0 \in \Omega$; здесь J — некоторое фиксированное (как можно более простое!) отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.

Из известных результатов теории гомотопий (см., напр., [4]) сразу вытекает, что ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным, если $m < n$ — в этом случае функций γ, принимающих значения из какой-либо нетривиальной группы и обладающих свойствами 1—3, просто не существует (ни при каком выборе J!). Иначе обстоит дело, когда $m > n$. Настоящая статья посвящена детальному обсуждению ситуации, когда $m = n + 1$, т. е. топологической теории векторных полей из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$. Обсуждаются также и соответствующие вопросы для некоторых классов отображений банаховых пространств.

1. Напомним некоторые результаты Хопфа [5], Фрейденталя [6], Понтрягина [7], относящиеся к гомотопической классификации отображений сферы S^{n+1} в сферу S^n. При $n = 1$ эта классификация тривиальна; при $n = 2$ гомотопические классы описываются так называемым инвариантом Хопфа, принимающим любые целочисленные значения; при $n > 2$ гомотопических классов только два, и они полностью описываются инвариантом Фрейденталя, принимающим значения из группы Z_2 вычетов по модулю 2. Из этих результатов немедленно следует, что при $n \neq 3$ целочисленных функций γ, обладающих свойствами 1—3, не существует. Этот же результат справедлив и при $n = 3$, хотя и требует для своего обоснования более тонких рассуждений. Однако, если рассмотреть обладающие свойствами 1—3 функции со значениями в Z_2, ситуация оказывается иной. Положим

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{n+1}) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2,\ 2(x_1x_3 + x_2x_4),$$
$$2(x_2x_3 - x_1x_4),\ x_5, \ldots, x_{n+1}). \qquad (1)$$

Теорема 1. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда существует единственная принимающая значения в Z_2 функция γ, обладающая свойствами 1—3 при J, определенном равенством (1).

В иных терминах эта теорема фактически установлена Хопфом ($n = 3$) и Фрейденталем ($n > 3$); предложенная Понтрягиным [7], конструкция позволяет существенно упростить описание функции γ и доказательство ее существования. В случае, когда поле Φ регулярно (т. е. $\operatorname{rang} \Phi'(x) = n$ для любой точки $x \in \Omega$, в которой $\Phi x = 0$), $\gamma(\Phi, \Omega)$ определяется сравнительно просто. В самом деле, в этом случае $\Phi^{-1}(0)$ состоит из конечного числа циклов $C_1, \ldots, C_s$. Если C_j — один из них и $x = x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — его параметризация, то при всех $t \in [0, 1]$ линейное преобразование $\Phi'(x(t))$ отображает $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{R}^n$. Можно показать, что существует непрерывно зависящая от t на $[0, 1]$ оператор-функция $N(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, для которой при $t \in [0, 1]$ справедливо равенство $\det \Phi'(x(t)) N(t) = 1$. Тем самым оператор-функция $\Phi'(x(t)) N(t)$ образует петлю в специальной линейной группе [8] $SL(n, \mathbb{R})$. Припишем циклу C_j элемент 0, если построенная петля в $SL(n, \mathbb{R})$ стягиваема, и элемент 1, если построенная петля в $SL(n, \mathbb{R})$ нестягиваема. Сумма (в группе Z_2) приписанных циклам $C_1, \ldots, C_s$ элементов и есть вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$. Общий случай легко сводится к описанному частному с помощью теорем Вейерштрасса и Сарда [9].

Сформулируем основные свойства вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$; их доказательства вполне аналогичны доказательствам соответствующих утверждений теории вращения для отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. Если отображение Φ невырождено на замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω, то $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$.

Если M — изолированная часть множества нулей Φ, то можно ввести индекс $\operatorname{ind}(M, \Phi)$, как вращение $\gamma(\Phi, U)$ на границах достаточно малых окрестностей U множества M.

Теорема 3. Если множество нулей отображения Φ на замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω является объединением конечного числа изолированных частей $M_1, \ldots, M_s \subset \Omega$, то справедливо равенство

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \operatorname{ind}(M_1, \Phi) + \ldots + \operatorname{ind}(M_s, \Phi).$$

Теорема 4. Пусть $n > 3$ и Ω — односвязная область. Если Φ — невырожденное на границе Ω области Ω поле и $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$, то Φ с границы Ω можно продолжить в непрерывное на замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω поле без особых точек.

Теорема 5. Пусть $n > 3$ и Ω — область с односвязной границей. Если Φ_0 и Φ_1 — два невырожденных на границе Ω области Ω поля и $\gamma(\Phi_0, \Omega) = \gamma(\Phi_1, \Omega)$, то поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны.

Теоремы 4 и 5 не охватывают случая $n = 3$. Здесь ситуация оказывается более сложной, и ее анализ требует привлечения инварианта Хопфа [5] и некоторых его обобщений.

2. Для приложений теории вращения к исследованию нелинейных уравнений необходимо уметь вычислять вращение для возможно большего числа классов нелинейных отображений. Основные результаты вычисления вращения конкретных векторных полей в классической теории вращения основаны [1—3] на формуле для вращения линейного векторного поля. Для рассматриваемого здесь случая линейные поля непригодны — вращение любого линейного векторного поля, невырожденного на границе некоторой области, равно (по теореме 2) нулю. Оказывается, что в теории векторных полей из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ роль линейных полей играют квадратичные поля. При этом, в силу теоремы 3, достаточно уметь вычислять индекс нулевой особой точки невырожденных квадратичных полей.

Пусть B — невырожденное квадратичное поле из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$, $\tilde{B}$ — его сужение на произвольное n-мерное подпространство $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и пусть π_B — такое отображение проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$ в S^{n-1}, для которого $\pi_B \chi x = \| \tilde{B}x \|^{-1} \tilde{B}x$ $(x \in S^{n-1})$; здесь χ — каноническое отображение S^{n-1} на $\mathbb{R}P^{n-1}$. Тогда (см., напр., [10]) определена степень $\sigma(\pi_B)$ отображения π_B, являющаяся элементом группы Z_2.

Теорема 6. Пусть B — невырожденное квадратичное отображение из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\operatorname{ind}(0, B) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 4k - 1, \\ \sigma(\pi_B) & \text{при } n = 4k - 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Степень отображения $\sigma(\pi_B)$ в некоторых случаях просто вычисляется с помощью равенства

$$\sigma(\pi_B) = \frac{N}{2} \pmod 2. \tag{3}$$

Здесь N — число решений произвольной системы $Bx = \xi$ с регулярным для B элементом $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим совсем частный случай, когда $n = 3$ и $B = (P, Q, R)$, где P, Q, R — квадратичные формы. Из теоремы 6 вытекает, что ind $(0, B) = 0$, если хотя бы одна из форм P, Q, R вырождена или хотя бы одна из них имеет ненулевую сигнатуру. Если они все невырождены и имеют нулевые сигнатуры, то без ограничения общности можно считать, что $K(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$. Пусть Π — произвольная двухмерная плоскость вида $(x_1, x_2, \cos\varphi, \sin\varphi)$. Тогда $\sigma(\pi_B) = \gamma(B_0, \omega) \pmod 2$, где B_0 — сужение B на Π, а ω — пересечение Π с конусом $R < 0$.

3. Приведем еще одно утверждение о вычислении индекса, аналогичное алгоритму (см., напр., [2]) сведения в задаче о вычислении индекса к исследованию векторных полей малой размерности.

Пусть поле $\Phi: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ имеет вид $\Phi = A + \Omega$, где A — линейный оператор с дефектом k, а Ω $(\Omega 0 = 0)$ — нелинейный оператор, удовлетворяющий условию Липшица $\|\Omega x_1 - \Omega x_2\| \leqslant q(r)\|x_1 - x_2\|$ $(\|x_1\|, \|x_2\| \leqslant r)$, причем $q(r) \to 0$ при $r \to 0$. Пусть Q — некоторый проектор на область значений A, $P = I - Q$, U — $(k+1)$-мерное подпространство нулей A; V — произвольное дополнительное к U подпространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда в силу классической теоремы о неявной функции уравнение $AV + Q\Omega(u + v) = 0$ $(u \in U, v \in V)$ имеет при малых u единственное малое решение $v = Ru$. Положим $\Psi u = P\Omega(u + Ru)$.

Теорема 7. Нулевая особая точка поля Φ изолирована в том и только том случае, когда изолирована нулевая особая точка поля Ψ; при этом справедливо равенство ind $(0, \Phi) =$ ind $(0, \Psi)$.

В частности, теоремы 6 и 7 позволяют вычислять вращение линейно-квадратичных полей (т. е. полей, компонентами которых являются линейные и квадратичные формы).

4. Переход к бесконечномерному случаю проводится по стандартным схемам, изложенным, например, в [2, 11, 12]. Мы ограничимся описанием двух классов отображений, для которых этот переход возможен.

Пусть X, Y — банаховы пространства, причем X и $Y + \mathbb{R}$ изоморфны; U — подпространство X коразмерности 4; V — подпространство Y коразмерности 3. Тогда U и V изоморфны; пусть θ — один из изоморфизмов U на V. Каждый $x \in X$ представим в виде $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, u)$, где $\xi_i \in \mathbb{R}$, $u \in U$; аналогично, каждый $y \in Y$ представим в виде $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, v)$, где $\eta_i \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Положим

$$Jx = (\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2,\ 2(\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_4),\ 2(\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4),\ \theta u). \tag{4}$$

Теорема 8. Пусть J определен равенством (4) и L — линейный фредгольмов оператор из X в Y с индексом 1. Тогда на семействе $\mathcal{F}(L)$ вполне непрерывных возмущений оператора L существует единственная принимающая значения в Z_2 функция γ, обладающая свойствами 1—3.

Теорема 9. Пусть J определен равенством (4). Тогда на семействе $\mathcal{F}_*$ собственных Фредгольмовых с индексом 1 C^3-гладких отображений из X в Y с односвязной областью определения существует единственная принимающая значения в Z_2 функция γ, обладающая свойствами 1—3.

Естественно, на семейства отображений $\mathcal{F}(L)$ и $\mathcal{F}^*$ распространяются утверждения теорем 2, 3, 6, 7 (для семейства $\mathcal{F}(L)$ верны и теоремы 4 и 5).

5. Рассмотрим некоторые приложения к нелинейным уравнениям.

Пусть оператор $f: X \times \mathbb{R} \to Y$ имеет вид $f(x, \lambda) = A(\lambda)x + B(\lambda)x + W(\lambda)x$, где $A(\lambda)$ — линейный фредгольмов оператор с индексом 1; $B(\lambda)$ — квадратичный вполне непрерывный оператор; $W(\lambda)$ —

вполне непрерывный оператор, удовлетворяющий равномерно по λ условию $W(\lambda) = 0\ (\| x \|^2)$ при $x \to 0$.

Уравнение

$$f(x, \lambda) = 0 \tag{5}$$

имеет при всех λ нулевое решение. Будем говорить, что значение λ_0 параметра λ является точкой бифуркации уравнения (5), если для каждого $\varepsilon > 0$ уравнение (5) имеет при некотором $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$ ненулевое решение с нормой, не превосходящей ε. Нас будет интересовать вопрос о том, какие условия являются достаточными для бифуркации уравнения (5) в точке λ_0.

Пусть $M = \{\lambda \in \mathbb{R} : \operatorname{Im} A(\lambda) = Y\}$. Тогда при каждом $\lambda \in M$ уравнение (5) имеет одномерную ветвь малых решений, проходящую через начало координат, и, следовательно, все $\lambda \in M$ будут точками бифуркации. Для остальных λ бифуркация может быть гарантирована лишь при определенных условиях, которые, в частности, могут формулироваться в терминах функции $\varkappa(\lambda) = \operatorname{ind}(0, f(\lambda, \cdot))$, которая обычно легко вычисляется с помощью теорем 6 и 7.

Теорема 10. Пусть функция $\varkappa$ либо не определена ни в какой окрестности точки λ_0, либо не является постоянной ни в какой окрестности точки λ_0. Тогда λ_0 — точка бифуркации уравнения (5).

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение

$$Ax + Bx + \Omega x = f, \tag{6}$$

где A — фредгольмов индекса 1 оператор из X в Y; B — вполне непрерывный квадратичный оператор из X в Y; Ω — нелинейный вполне непрерывный оператор из X в Y, удовлетворяющий условию $\Omega x = 0\ (\| x \|)\ (x \to \infty)$. Будем говорить, что пара операторов (A, B) невырождена в бесконечности, если существуют положительные c и r, для которых $\| Ax + \lambda Bx \| \geqslant c$ $(\| x \| = 1,\ \lambda \geqslant r)$. Если Y — гильбертово пространство, то достаточным условием невырожденности в бесконечности пары операторов (A, B) являются неравенства

$$\| Ax \| + \| Bx \| > 0\ \ (x \neq 0), \quad (Ax, Bx) \geqslant \gamma \| Ax \| \, \| Bx \|,$$

где $\gamma \in (-1, 0]$; если Y — банахово пространство, то такие условия формулируются более сложным образом. Если пара операторов (A, B) невырождена в бесконечности, то определено вращение поля $\Phi_0 x = Ax + Bx$ на границах шаров с центром 0 и достаточно большого радиуса; обозначим это вращение через $\gamma(\infty)$.

Теорема 11. Пусть (A, B) — невырожденная в бесконечности пара операторов и $\gamma(\infty) = 1$. Тогда уравнение (6) имеет по крайней мере одно решение при любом $f \in Y$.

6. Как отмечалось, применения к теории уравнений вращения γ для фредгольмовых операторов с индексом 1 по существу основано на теореме 6 — именно она позволяет эффективно использовать теоремы 10 и 11. Авторам представляется, что более естественные приложения описанной теории связаны с исследованием уравнений, обладающих циклами решений.

Будем говорить, что петля $\pi = \{D(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1,\ D(0) = D(1)\}$ фредгольмовых с индексом 1 линейных операторов из X в Y является квазистягиваемой, если существуют конечнодефектные проекторы Q, для которых петля $\{QD(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ стягиваема в многообразии фредгольмовых индекса 1 линейных операторов из X в Y. Если дополнительно предположить, что $D(t)\, X = Y$ при $t \in [0, 1]$, то для квазистягиваемой петли можно доказать существование в Y конечномерного подпространства $\mathbb{R}^m \subset Y\ (m \geqslant 3)$ и непрерывной оператор-функции $N(t) : \mathbb{R}^m \to X\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$, для которой $N(0) = N(1)$, $D(t)\, N(t)\, \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ и $\det D(t)\, N(t) = 1$. Обозначим через $\varepsilon(\pi)$ число 0, если петля $\Pi = \{D(t)\, N(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ стягиваема в $SL(m, \mathbb{R})$, и число 1 в противном случае.

Теорема 12. Пусть $\gamma = \{x(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1,\ \ x(0) = x(1)\}$ — нулевой цикл отображения $\Phi : X \to Y$, причем Φ непрерывно дифференцируема на

γ, петля $\Pi = \{\Phi'(x(t)) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ квазистягиваема и $\Phi'(x(t))X = Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда цикл γ является изолированным нулевым множеством для Φ и его индекс определяется равенством $\mathrm{ind}(\gamma, \Phi) = \varepsilon(\Pi)$.

Теорема 12 по обычным схемам позволяет установить теорему об устойчивости изолированного цикла при малых возмущениях и теорему о бифуркации такого цикла.

7. Приложения описанных результатов к исследованию краевых задач для уравнений эллиптического типа или нелинейных сингулярных интегральных уравнений с единичным индексом следуют обычным схемам, используемым для анализа уравнений с нулевым индексом и не связаны с преодолением каких-либо существенных трудностей. Более того, большая часть теоретических построений работы достаточно просто может быть перенесена на отображения произвольного положительного индекса и, следовательно, может быть использована для анализа краевых задач и интегральных уравнений. Однако для вычисления соответствующих топологических характеристик в этом, более общем, случае приведенных в настоящей статье соображений оказывается уже недостаточно.

1. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М. : Гостехтеориздат, 1956.— 392 с.
2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М. : Наука, 1975.— 512 с.
3. *Deimling K.* Nonlinear Functional Analysis.— Berlin; Springer Verlag, 1985.— 450 S.
4. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий.— М. : Мир, 1964.— 468 с.
5. *Hopf H.* Uber Abbildungen der dreidimensional Sphären auf die Kugelfläche // Math. Ann.— 1931.— **104**, N 3.— P. 637—655.
6. *Freudental H.* Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I // Composite Math.— 1937.— 5, N 2.— P. 299—314.
7. *Понтрягин Л. С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.— М. : Наука, 1976.— 174 с.
8. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли.— М. : Наука, 1982.— 447 с.
9. *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М. : Мир, 1977.— 208 с.
10. *Милнор Д., Уоллес А.* Дифференциальная топология.— М. : Мир, 1972.— 278 с.
11. *Smale S.* An infinite dimensional version of Sard's theorem // Amer. J. Math.—1985.— 87.— P. 861—866.
12. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере — Шаудера // Успехи мат. наук.— 1977.— 32, № 4.—С. 3—54.

Белорус. гос. ун-т Получено 23.09.87